Goethe-Universität Frankfurt am Main
Institut für Informatik
Theorie komplexer Systeme
Prof. Dr. Nicole Schweikardt

2. November 2011

Diskrete Modellierung

Wintersemester 2011/2012

Übungsblatt 2

Abgabe: *bis 9. November 2011, 8.^{15} Uhr (vor der Vorlesung oder in Raum RM 11-15/113)*

Aufgabe 1: **(25 Punkte)**

In dieser Aufgabe betrachten wir das Spiel *NimHalbe*, das wie folgt definiert ist: Zwei Spieler, Alice und Bob, spielen gegeneinander. Zu Beginn des Spiels liegen 1336 Hölzer auf dem Tisch. Die beiden Spieler sind abwechselnd am Zug, Alice beginnt. In jedem Zug kann der Spieler, der gerade an der Reihe ist, entweder drei Hölzer vom Tisch entfernen oder, falls eine gerade Anzahl an Hölzern auf dem Tisch liegt, den Haufen halbieren, also die Hälfte der Hölzer vom Stapel nehmen. So kann Alice im ersten Zug drei Hölzer vom Tisch nehmen (es verbleiben 1333) oder den Stapel halbieren (es verbleiben 668). Hiernach ist Bob am Zug und kann bei 668 Hölzern wieder zwischen beiden Optionen wählen; bei 1333 Hölzern ist er gezwungen, drei davon wegzunehmen. Es gewinnt der Spieler, der eine Anzahl von Hölzern auf dem Tisch hinterlässt, die eine Primzahl ist. (Achtung: 1 ist keine Primzahl.)

Modellieren Sie zur Beantwortung der folgenden Fragen das Spiel analog zum Beispiel 1.1 aus der Vorlesung durch ein Transitionssystem.

- **(a)** Ist es eine gute Idee für Alice, im ersten Zug gleich den Stapel zu halbieren ?
- **(b)** Eine Gewinnstrategie für einen Spieler in diesem Spiel ist eine Vorschrift, die ihm sagt, welchen Zug er als nächstes tätigen soll. Hält sich der Spieler an diese Vorschrift, so gewinnt er auf jeden Fall. Existiert in diesem Spiel eine Gewinnstrategie für Alice?
- **(c)** Existiert eine Gewinnstrategie für Bob?

Aufgabe 2: **(21 Punkte)**

In den folgenden Teilaufgaben sollen einige Aspekte des Rollenspiels *Village of Voidcraft VoV* mit Wertebereichen modelliert werden. Setzen Sie dabei nur die Menge $\mathbb{N}$ als vordefiniert voraus.

- **(a)** In der Welt von VoV gibt es 80 Orte, von denen 17 Siedlungen, 30 Burgen und 33 Kerker sind. Die Siedlungen sind von 1 bis 17, die Burgen von 1 bis 30 und die Kerker von 1 bis 33 durchnummeriert. Definieren Sie die vier Mengen ORTE, SIEDLUNGEN, BURGEN und KERKER, deren Elemente die Orte, Siedlungen, Burgen und Kerker repräsentieren.
- **(b)** Jede Gruppe von Gegnern, auf die ein Held in VoV treffen kann, zeichnet sich durch die Anzahl der Orks und die Anzahl der Trolle darin aus, die jeweils beliebig groß sein kann.
  - **(i)** Definieren Sie die Menge GEGNERHEERE, von der jedes Element eine mögliche Zusammensetzung einer Gegnergruppe (d.h. die Anzahl der Orks und die Anzahl der Trolle darin) repräsentiert.
  - **(ii)** Welches Element von GEGNERHEERE steht für eine Gegnergruppe, die sich aus 11 Orks und 13 Trollen zusammensetzt?
- **(c)** Der Zustand des Helden von VoV ist zu jedem Zeitpunkt bestimmt durch den Betrag an Goldtalern, den er bei sich trägt, die Anzahl an Erfahrungspunkten, die er bisher gesammelt hat und die Menge der Burgen und Kerker, die er bisher besucht hat.

(i) Definieren Sie eine Menge HELDENZUSTÄNDE, von der jedes Element einen möglichen Zustand des Helden definiert.

(ii) Welches Element von HELDENZUSTÄNDE beschreibt, dass der Held 120 Goldtaler bei sich trägt, 4711 Erfahrungspunkte hat und bereits die Burgen 3, 12 und 23 sowie die Kerker 7 und 23 besucht hat?

(d) Befreit der Held von VoV eine Burg oder einen Kerker komplett von Gegnern, so bekommt er Erfahrungspunkte gutgeschrieben. Die Höhe dieser Punkte hängt davon ab, welche Burg bzw. welchen Kerker er befreit hat und aus wie vielen Orks und Trollen die Gegnergruppe bestand. Geben Sie Mengen A und B an, so dass der beschriebene Zusammenhang durch eine Funktion *Erfahrungszuwachs*: $A \to B$ modelliert werden kann, d.h. *Erfahrungszuwachs* soll die zusätzlichen Erfahrungspunkte in Abhängigkeit von der Burg bzw. dem Kerker selbst und der Zusammensetzung der Gegner darin angeben.

Aufgabe 3: **(30 Punkte)**

(a) Geben Sie alle Relationen von $A := \{1, 2\}$ nach $B := \{p, q\}$ an. Geben Sie für jede Relation an, ob sie eine Funktion von A nach B oder eine partielle Funktion von A nach B oder keines von beiden ist. Geben Sie außerdem für jede Funktion an, ob sie injektiv, surjektiv und/oder bijektiv ist.

(b) Geben Sie für jede der folgenden Funktionen f an, ob die Funktion injektiv, surjektiv und/oder bijektiv ist. Geben Sie jeweils auch das Bild von f an.

(i) $f\colon \mathbb{N}_{>0} \to \mathbb{N}$ mit $f(x) = x - 1$ für alle $x \in \mathbb{N}_{>0}$

(ii) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ mit $f(x) = x^2$ für alle $x \in \mathbb{R}$

(iii) $f\colon \mathbb{N} \to \{-1, 0, 1\}$ mit $f(x) := (-1)^x$ für alle $x \in \mathbb{N}$

(iv) $f\colon A^* \to \mathbb{N}$ für eine beliebige Menge A mit $|A| = 1$ und $f(w) := |w|$ für alle $w \in A^*$

(v) $f\colon A^* \to \mathbb{N}$ für eine beliebige Menge A mit $|A| = 2$ und $f(w) := |w|$ für alle $w \in A^*$

(c) Wie viele Möglichkeiten gibt es,

(i) zwei Bälle B_1, B_2 so auf drei Körbe K_1, K_2, K_3 zu verteilen, dass jeder Ball in einem anderen Korb landet? D.h. wie viele injektive Funktionen von $\{B_1, B_2\}$ nach $\{K_1, K_2, K_3\}$ gibt es?

(ii) drei Bälle B_1, B_2, B_3 so auf drei Körbe K_1, K_2, K_3 zu verteilen, dass kein Korb leer bleibt? D.h. wie viele surjektive Funktionen von $\{B_1, B_2, B_3\}$ nach $\{K_1, K_2, K_3\}$ gibt es?

Aufgabe 4: **(24 Punkte)**

(a) Seien A, B und C endliche Mengen und sei $f : A \to B$ eine Funktion von A nach B und $g : B \to C$ eine Funktion von B nach C. Wir definieren die Funktion $h : A \to C$ als *Komposition*, d.h. Hintereinanderausführung, von f und g als $h(x) := g(f(x))$ f.a. $x \in A$. Beweisen Sie die Gültigkeit der folgenden Aussagen:

(i) Wenn f und g surjektiv sind, so ist auch h surjektiv.

(ii) Wenn f und g injektiv sind, so ist auch h injektiv.

(iii) Wenn f und g bijektiv sind, so ist auch h bijektiv.

(b) Seien X und Y endliche Mengen und $f \subseteq X \times Y$ eine Relation von X nach Y. Wir definieren die Relation $\widetilde{f}$ als Relation von Y nach X wie folgt:

$$\text{Für alle } x \in X,\ y \in Y \text{ gilt:} \quad (y, x) \in \widetilde{f} :\Longleftrightarrow (x, y) \in f,$$

Beweisen Sie, dass die folgende Aussage korrekt ist: f ist genau dann eine bijektive Funktion, wenn $\widetilde{f}$ eine bijektive Funktion ist.[1]

[1] In diesem Falle wird $\widetilde{f}$ die *Umkehrfunktion* von f genannt und üblicherweise mit f^{-1} bezeichnet.