Goethe-Universität Frankfurt am Main
Institut für Informatik
Theorie komplexer Systeme
Prof. Dr. Nicole Schweikardt

26. Oktober 2011

Diskrete Modellierung

Wintersemester 2011/2012

Übungsblatt 1

Abgabe: *bis 2. November 2011, 8.^{15} Uhr (vor der Vorlesung oder in Raum RM 11-15/113)*

*Bitte achten Sie darauf, dass Sie auf der Abgabe Ihrer Lösung Ihren **Namen**, Ihre **Matrikelnummer** und Ihre **Übungsgruppe** angeben. Fehlt eine dieser Angaben, müssen Sie mit **Punktabzug** rechnen. Mehrseitige Abgaben müssen zusammengeheftet werden. Eine verspätete Abgabe ist **nicht** möglich!*

*Für dieses Übungsblatt und **alle** folgenden gilt: Eine Aufgabe gilt nur dann als vollständig bearbeitet, wenn neben der Lösung auch die notwendigen Begründungen angegeben sind – es sei denn, in der Aufgabenstellung steht, dass eine solche Begründung nicht erforderlich ist.*

Aufgabe 1: **(29 Punkte)**

Der Polizist John McLane hat ein Déjà-vu: Schon wieder steht er knietief in einem Brunnen und soll mithilfe von zwei Gefäßen eine bestimmte Menge Wasser daraus schöpfen. Immerhin ist die Aufgabe seit dem letzten Mal etwas einfacher geworden (Bruce ist ja auch nicht mehr der Jüngste). John startet mit zwei leeren Gefäßen, eines davon fasst genau einen Liter, das andere genau drei. Ziel ist es, in beiden Gefäßen jeweils genau die Menge von einem Liter Wasser zu haben. Da sich an den Gefäßen keine Markierungen befinden, kann John sein Ziel nur durch eine schrittweise Ausführung der folgenden Aktionen erreichen: Er kann eines der Gefäße vollständig mit Wasser aus dem Brunnen befüllen, eines der Gefäße komplett auskippen oder Wasser eines Gefäßes in das andere kippen bis eines der Gefäße voll oder leer ist. Da John es hasst, von vorne zu beginnen, wird er außerdem niemals in den Startzustand mit zwei leeren Gefäßen zurückkehren.

Modellieren Sie zur Beantwortung der folgenden Fragen das Problem durch ein Transitionssystem analog zum „Murmelbeispiel“ aus der Vorlesung.

(a) Kann John McLane sein Ziel erreichen?

(b) Ist es möglich, dass John sich durch eine ungeschickte Abfolge von Schritten (aber unter Berücksichtigung der Regeln) in eine Situation bringt aus der er das Ziel nicht mehr erreichen kann?

(c) Für John ist es unerträglich, nicht voran zu kommen. Er möchte deshalb niemals eine gerade getätigte Aktion direkt wieder rückgängig machen. Nehmen Sie nun an, dass John keine Aktion direkt wieder rückgängig macht und ansonsten (unter Berücksichtigung der Regeln) wahllos vorgeht. Wird er dann zwangsläufig irgendwann in den Zustand kommen, in dem er sein Ziel erreicht hat?

Aufgabe 2: **(22 Punkte)**

Sei $U := \mathbb{N}$ ein festes Universum, sei $M := \{2, 6, 7, 13, 29, 42\}$, sei $N := \{1, 3, 5, 7, \ldots\}$ die Menge der ungeraden natürlichen Zahlen, und sei $P := \{1, 2, 4, 8, 16, \ldots\} = \{2^i : i \in \mathbb{N}\}$ die Menge der Zweierpotenzen. Schreiben Sie jede der folgenden Mengen in extensionaler Form auf und geben Sie ihre Kardinalität an. (Sie brauchen Ihre Antwort nicht zu begründen.)

(a) $\{x \in \mathbb{N} : \sqrt{x} \in M\}$ **(c)** $\{42\}^3$ **(e)** $\bigcup_{x \in (N \cap M)} \{1, x\}$

(b) $(N \cap P) \cup (\overline{\overline{N} \cup \overline{P}})$ **(d)** $((M \setminus \{2\}) \cap P) \times \mathcal{P}(N)$ **(f)** $\{x \in \overline{N} \cup M : x \text{ ist Primzahl}\}$

Erinnerung: Eine Primzahl ist eine natürliche Zahl größer als eins, die nur durch sich selbst und durch eins teilbar ist.

Gelten die folgenden Aussagen? (Sie brauchen Ihre Antwort nicht zu begründen.)

(g) $(42, 43) \in M \triangle N$ **(i)** $(2, 37) \in (P \times N)^2$

(h) $\{\emptyset, 256\} \subsetneq \mathcal{P}(P)$ **(j)** $\{81314323942541\} \in \mathcal{P}(P)$

Aufgabe 3: **(24 Punkte)**

Beweisen Sie die Korrektheit der folgenden Gleichungen für alle Mengen X, Y und Z.

(a) $X \cap (Y \cup Z) = (X \cap Y) \cup (X \cap Z)$. (Satz 2.9 (e) 1. Gleichung)

(b) $\overline{X \cup Y} = \overline{X} \cap \overline{Y}$. (Satz 2.10 (b) 2. Gleichung)

Aufgabe 4: **(25 Punkte)**

Leon ist bei den drei sozialen Netzwerken StudiVZ, Google+ und Facebook angemeldet. Auch alle seine Freunde sind bei mindestens einem dieser sozialen Netzwerke Mitglied. Sei S die Menge der Freunde von Leon, die sich bei StudiVZ und G die Menge der Freunde, die sich bei Google+ angemeldet haben. Außerdem sei F die Menge der Freunde von Leon, die Mitglied bei Facebook sind. Durch seine Recherchen hat Leon folgende Informationen zusammen getragen:

$$|S| = 20, \quad |G| = 23, \quad |F| = 20, \quad |S \cap G| = 8, \quad |S \cap F| = 7, \quad |G \cap F| = 9, \quad |S \cap G \cap F| = 3$$

(a) Wie viele Freunde hat Leon?
D.h. berechnen Sie $|S \cup G \cup F|$.

(b) Wie viele von Leons Freunden sind in genau zwei der sozialen Netzwerke angemeldet?
D.h. berechnen Sie $|((S \cap G) \cup (S \cap F) \cup (G \cap F)) \setminus (S \cap G \cap F)|$.

(c) Leon möchte eine Nachricht schreiben, die alle seine Freunde bei StudiVZ erhalten und zusätzlich alle seine Freunde, die bei Google+ aber nicht gleichzeitig bei Facebook angemeldet sind. An wie viele seiner Freunde muss Leon diese Nachricht schreiben?
D.h. berechnen Sie $|S \cup (G \setminus F)|$.

Hinweis: Überlegen Sie sich zunächst anhand von Venn-Diagrammen, wie man die Kardinalitäten der Mengen berechnen kann.