Goethe-Universität Frankfurt am Main
Institut für Informatik
Theorie komplexer Systeme
Prof. Dr. Nicole Schweikardt

2. Februar 2011

Diskrete Modellierung

Wintersemester 2010/2011

Übungsblatt 13

Abgabe: *bis 9. Februar 2011, 8.15 Uhr (vor der Vorlesung oder in Raum RM 11-15/113)*

Aufgabe 1: **(28 Punkte)**

(a) Gegeben seien die folgenden regulären Ausdrücke

$$R_1 = ((0|1)(0|1))^* \qquad R_2 = (\varepsilon|00|10|11)^* \qquad R_3 = (0|1)((0|1)(0|1))^*$$

(i) Gehören die folgenden Worte zur Sprache $L(R_1)$, $L(R_2)$ bzw. $L(R_3)$?

$$w_1 = \varepsilon \qquad w_2 = 110 \qquad w_3 = 1111 \qquad w_4 = 101010$$

(ii) Geben Sie das kürzeste nicht-leere Wort w an, so dass $w \in L(R_1)$ und $w \notin L(R_2)$.

(iii) Beschreiben Sie die Sprachen $L(R_2) \setminus L(R_1)$ und $L(R_1) \cup L(R_3)$ jeweils umgangssprachlich.

(iv) Geben Sie einen DFA mit möglichst wenigen Zuständen in graphischer Darstellung an, der die Sprache $L(R_2)$ akzeptiert.

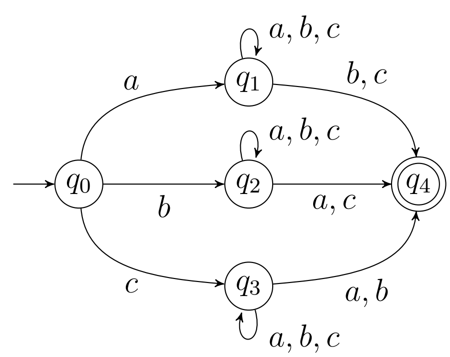
(b) Geben Sie für die folgenden Sprachen je einen möglichst kurzen regulären Ausdruck an, der die Sprache beschreibt.

(i) $L_1 := \{w \in \{a,b\}^* : w \text{ hat genau die Länge drei}\}$

(ii) $L_2 := \{w = w_0w_1w_2\ldots \in \{a,b\}^* : \ w_i = b, \text{ f.a. } i = 2n, n \in \mathbb{N}\}$

(iii) $L_3 := \{w \in \{a,b\}^* : \text{der erste und der letzte Buchstabe von } w \text{ ist gleich}\}$

(c) Betrachten Sie den abgebildeten NFA A über dem Eingabealphabet $\Sigma = \{a,b,c\}$.
Geben Sie einen DFA A' in graphischer Darstellung an, mit $L(A') = L(A)$. Wandeln sie dazu den NFA A mit Hilfe der Potenzmengenkonstruktion in einen DFA A' um. Berücksichtigen Sie dabei nur solche Zustände von A', die vom Startzustand $q_0' := \{q_0\}$ aus erreicht werden können.



Aufgabe 2: **(25 Punkte)**

Welche der Sprachen L_1, L_2 und L_3 sind regulär, welche nicht? Beweisen Sie Ihre Antwort jeweils mit Hilfe des Pumping-Lemmas oder durch die Angabe eines endlichen Automaten.

(a) $L_1 := \{a^2a^2\}$ **(b)** $L_2 := \{a^na^n : n \in \mathbb{N}\}$ **(c)** $L_3 := \{a^nba^n : n \in \mathbb{N}\}$

Aufgabe 3: **(20 Punkte)**

Die Sprache BA der *Booleschen Ausdrücke* ist die Menge der Wörter über dem Alphabet $A = \{\neg, \mathbf{0}, \mathbf{1}, \wedge, \vee, (,)\}$, die rekursiv wie folgt definiert ist:

Basisregel: (B) Die Symbole $\mathbf{0}$ und $\mathbf{1}$ sind in BA.

Rekursive Regeln: (R1) Sind w_1 in BA, so ist auch $\neg w_1$ in BA.

(R2) Sind w_1 und w_2 in BA, so sind auch $(w_1 \wedge w_2)$ und $(w_1 \vee w_2)$ in BA.

Geben Sie eine kontextfreie Grammatik G an, so dass $L(G) = \mathsf{BA}$ ist. Geben Sie außerdem einen Ableitungsbaum für das Wort $((\mathbf{0} \vee \neg\mathbf{0}) \wedge (\mathbf{1} \wedge \neg\mathbf{1}))$ an.

Aufgabe 4: **(27 Punkte)**

Jessie und James von Team Rocket hatten schon länger das Gefühl, karrieremäßig in einer Sackgasse zu stecken. Darum gehen sie nun in Saffron City einer neuen Beschäftigung, dem Kidnapping nach. Damit ihre Opfer selbst nicht wissen, wo sie festgehalten gehalten werden, verbindet James jedem Opfer sofort nach der Gefangennahme die Augen und fährt es mit dem Auto, oft auf einem Umweg, zum Versteck.

Die Route für diese Fahrt wird von Jessie bestimmt und besteht aus einem Wort x über dem Alphabet $\Sigma := \{n, s, o, w\}$. Für jedes Zeichen in x gelesen von links nach rechts fährt James genau einen Häuserblock bis zur nächsten Kreuzung in eine bestimmte Richtung: Für n fährt er nach Norden, für s nach Süden, für o nach Osten und nach Westen für w. (Das funktioniert gut, weil der Straßenplan von Saffron City regelmäßig wie Millimeterpapier ist.) Am Ende des Wortes hat James das Versteck erreicht. Erhält James beispielsweise das Wort *nosoonw* und startet bei Position K, so fährt er die in Abbildung 1 gezeigte Route ab.

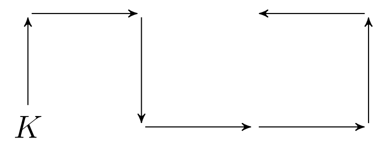


Abbildung 1

(a) Betrachten Sie die folgende Grammatik $G_1 = (T_1,\ N_1,\ S_1,\ P_1)$ mit $T_1 = \{n, s\}$, $N_1 = \{X, N, S\}$, $S_1 = X$ und

$$P_1 = \{\, X \to nS,\ \ X \to sN,\ \ X \to \varepsilon,\ \ N \to nX,\ \ N \to sNN,\ \ S \to sX,\ \ S \to nSS \,\}$$

(i) Überprüfen Sie für jedes der folgenden Worte, ob es in der von G_1 erzeugten Sprache liegt. Wenn ja, geben Sie eine schrittweise Ableitung analog zu Beispiel 8.4. für dieses Wort an; ansonsten begründen Sie, warum das Wort nicht zur Sprache gehört.

$w_1 = nnss$ $\qquad w_2 = sN$ $\qquad w_3 = n$ $\qquad w_4 = nsssnn$

(ii) Beschreiben Sie, welche Sprache $L(G_1)$ von der Grammatik G_1 erzeugt wird. Was für ein Fahrverhalten zeigt James, wenn er ein beliebiges Wort aus $L(G_1)$ als Routenanweisung erhält?

(b)

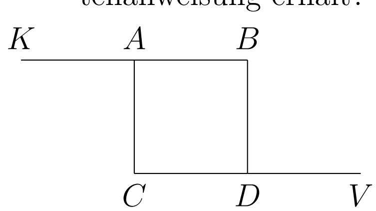


Abbildung 2

Weil die Polizei (besonders Officer Rocky) in Saffron City so aufmerksam ist, haben Jessie und James ihr Tätigkeitsgebiet nach Ringtown verlegt. Dieser kleine Ort besteht nur aus den Plätzen A, B, C, D sowie K und V, die durch Straßen wie in Abbildung 2 gezeigt verbunden sind. Jessie und James brauchen nun Fahrtrouten, die bei Position K (dem Kidnapping) beginnen, die eingezeichneten Straßen nicht verlassen und bei Position V (ihrem Versteck) enden. Mögliche Routen wären demnach *ooso* oder *owosonso*, nicht aber *ws* oder *osn*. Geben Sie eine kontextfreie Grammatik G an, die genau die Wörter über Σ erzeugt, die eine solche Fahrtroute beschreiben.

Hinweis: Nutzen Sie für jede der Positionen in der Abbildung ein eigenes Nichtterminalsymbol. Beschreiben Sie jede mögliche Richtung, die von jedem dieser Punkte aus jeweils möglich ist, durch eine Regel der Grammatik.