Goethe-Universität Frankfurt am Main
Institut für Informatik
Theorie komplexer Systeme
Prof. Dr. Nicole Schweikardt

26. Januar 2011

Diskrete Modellierung

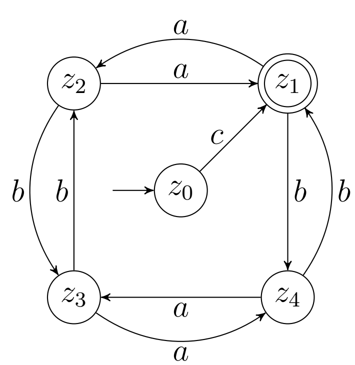
Wintersemester 2010/2011

Übungsblatt 12

Abgabe: *bis 2. Februar 2011, 8.15 Uhr (vor der Vorlesung oder in Raum RM 11-15/113)*

Aufgabe 1: **(30 Punkte)**

Sei A_1 der abgebildete endliche Automat über dem Alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$:



(a) Geben Sie folgendes für A_1 an:
- die Menge der Zustände,
- den Startzustand,
- die Menge der Endzustände und
- die Übergangsfunktion.

(b) Ist A_1 ein
- deterministischer Automat?
- nichtdeterministischer Automat?

(c) Welche der folgenden Wörter werden von A_1 akzeptiert, welche nicht? Begründen Sie Ihre Antworten.

- $z_0 z_1$
- *aabcaab*
- *cbaababab*
- *aabbaa*
- *cbbaaaabbbb*
- *cbaaab*

(d) Geben Sie die drei kürzesten Wörter an, die A_1 akzeptiert.

(e) Beschreiben Sie umgangssprachlich, aus welchen Wörtern die Sprache $L(A_1)$ besteht, die von A_1 akzeptiert wird.

(f) Geben Sie einen DFA A_2 mit möglichst wenigen Zuständen an, der vollständig ist und für den $L(A_2) = L(A_1)$ gilt.

Aufgabe 2: **(15 Punkte)**

Es ist ein weit verbreiteter Irrtum, dass sich der sogenannte Task-Manager in aktuellen Versionen des Windows-Betriebssystems durch die Tastenkombination Strg + Alt + Entf starten ließe. Tatsächlich ruft diese Kombination lediglich den Windows-Sicherheitsdialog auf (von dem aus sich dann allerdings der Task-Manager starten lässt). Die eigentliche Tastenkombination zum direkten Start des Task-Manager ist Strg + ⇑ + Esc. (Die ⇑ - Taste wird auch `shift` - oder Hochstelltaste genannt.)

Idee dieser Aufgabe ist es, ein Programm zu modellieren, das die Abfolge aller gedrückten Tasten von einer Tastatur entgegen nimmt und entscheidet, ob der Task-Manager direkt gestartet werden soll. Der Einfachheit halber gehen wir davon aus, dass die Tastatur nur die Zeichen $\boxed{\texttt{a}}$ - $\boxed{\texttt{z}}$ sowie $\boxed{\texttt{Strg}}$, $\boxed{\Uparrow}$ und $\boxed{\texttt{Esc}}$ enthält. Weiterhin nehmen wir an, dass die Tastatur jedes Mal, wenn eine Taste losgelassen wird, das Signal $|$ abschickt. Dadurch kann unterschieden werden zwischen gleichzeitig und hintereinander gedrückten Tasten: Werden die Tasten $\boxed{\texttt{d}}$ und $\boxed{\texttt{m}}$ einzeln hintereinander gedrückt, so erzeugt die Tastatur die Zeichenkette $\boxed{\texttt{d}}\,|\,\boxed{\texttt{m}}\,|$. Wird hingegen die Tastenkombination $\boxed{\texttt{d}}+\boxed{\texttt{m}}$ gedrückt, so erzeugt die Tastatur eine der Zeichenketten $\boxed{\texttt{d}}\,\boxed{\texttt{m}}\,||$ oder $\boxed{\texttt{m}}\,\boxed{\texttt{d}}\,||$.

Geben Sie einen nichtdeterministischen endlichen Automaten A in graphischer Darstellung an, der die übermittelte Zeichenfolge von der Tastatur entgegennimmt und genau dann akzeptiert, wenn die Tastenkombination für den direkten Start des Task-Managers und gleichzeitig keine weitere Taste gedrückt wird.

Aufgabe 3: (20 Punkte)

Mit Hilfe von endlichen Automaten soll die Teilbarkeit der natürlichen Zahlen in Dezimaldarstellung untersucht werden. Betrachten Sie das Eingabealphabet $\Sigma := \{0, 1, 2, 3, \dots, 9\}$. Wir identifizieren jedes Wort $w = w_0 w_1 w_2 \ldots \in \Sigma^*$ mit der natürlichen Zahl

$$w_{\text{nat}} := \begin{cases} 0 & , \text{ falls } w = \varepsilon \\ \sum\limits_{i=0}^{|w|-1} w_i \cdot 10^{|w|-(i+1)} & , \text{ sonst} \end{cases}$$

Geben Sie für jede der folgenden Sprachen jeweils einen endlichen Automaten mit möglichst wenigen Zuständen an, der genau diese Sprache akzeptiert.

(a) $L_1 := \{w \in \Sigma^* \,:\, w_{\text{nat}} \text{ ist durch 5 teilbar}\} = \{w \in \Sigma^* \,:\, \text{ex. } k \in \mathbb{N}, \text{ s.d. } w_{nat} = 5 \cdot k\}$

(b) $L_2 := \{w \in \Sigma^* \,:\, w_{\text{nat}} \text{ ist durch 4 teilbar}\} = \{w \in \Sigma^* \,:\, \text{ex. } k \in \mathbb{N}, \text{ s.d. } w_{nat} = 4 \cdot k\}$

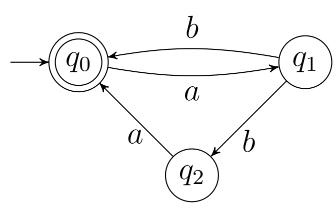
(c) $L_3 := \{w \in \Sigma^* \,:\, w_{\text{nat}} \text{ ist durch 20 teilbar}\} = \{w \in \Sigma^* \,:\, \text{ex. } k \in \mathbb{N}, \text{ s.d. } w_{nat} = 20 \cdot k\}$

Aufgabe 4: (35 Punkte)

(a) Betrachten Sie das Eingabealphabet $\Sigma := \{a, b\}$ und die Sprache

$$L_1 := \Big\{w \in \Sigma^* \,:\, w \text{ ist ein Wort aus } \{ab, aba\}^*\Big\}.$$

Die Sprache L_1 wird vom NFA A akzeptiert, der durch die folgende graphische Darstellung gegeben ist:



Geben Sie einen DFA A' in graphischer Darstellung an, der die Sprache L_1 akzeptiert. Wandeln sie dazu den NFA A mit Hilfe der Potenzmengenkonstruktion in den DFA A' um. Berücksichtigen Sie dabei nur solche Zustände von A', die vom Startzustand $q'_0 := \{q_0\}$ aus erreicht werden können.

(b) Betrachten Sie das Eingabealphabet $\Sigma := \{a, b\}$ und die Sprache

$$L_2 := \Big\{ww \,:\, w \in \Sigma^* \text{ und } |w| = 2\Big\}.$$

Beweisen Sie, dass jeder NFA, der L_2 akzeptiert mindestens vier verschiedene Zustände besitzt.