Goethe-Universität Frankfurt am Main
Institut für Informatik
Theorie komplexer Systeme
Prof. Dr. Nicole Schweikardt

19. Januar 2011

Diskrete Modellierung

Wintersemester 2010/2011

Übungsblatt 11

Abgabe: *bis 26. Januar 2011, 8.15 Uhr (vor der Vorlesung oder in Raum RM 11-15/113)*

Aufgabe 1: **(24 Punkte)**

Sei $\sigma = \{\dot{R}, \dot{f}, \dot{c}\}$ eine Signatur mit einem 2-stelligen Relationssymbol $\dot{R}$, einem 2-stelligen Funktionssymbol $\dot{f}$ und einem Konstantensymbol $\dot{c}$.

(a) Bestimmen Sie für jede der folgenden FO[σ]-Formeln, welche Variablen frei und welche Variablen gebunden in der Formel vorkommen. Entscheiden Sie außerdem für jede der FO[σ]-Formeln, ob es sich um einen FO[σ]-Satz handelt.

(i) $\dot{f}(\dot{c}, v_0) \doteq \dot{c}$

(ii) $\exists v_3\, \dot{R}(v_2, v_3)$

(iii) $\exists v_2\, \exists v_1 \big(\dot{R}(v_1, v_2) \rightarrow \dot{f}(v_2, v_1) \doteq \dot{c}\big)$

(iv) $\forall v_1 \big(\forall v_2\, \dot{R}(v_1, v_2) \wedge \dot{R}(v_1, v_2)\big)$

(v) $\big(\forall v_2\, \dot{f}(v_2, v_1) \doteq \dot{c} \vee \exists v_1\, \dot{R}(v_1, v_2)\big)$

(vi) $\forall v_1\, \forall v_2\, \dot{f}(v_2, v_1) \doteq \dot{f}(v_1, v_2)$

(b) Betrachten Sie die σ-Struktur $\mathfrak{A} = (A, \dot{R}^{\mathfrak{A}}, \dot{f}^{\mathfrak{A}}, \dot{c}^{\mathfrak{A}})$, wobei $A = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$, $\dot{R}^{\mathfrak{A}} = \{(1,1),(3,2),(4,8),(5,9),(6,1),(8,4)\}$ und $\dot{c}^{\mathfrak{A}} = 1$ gilt. Weiterhin sei $\dot{f}^{\mathfrak{A}} \colon A \times A \rightarrow A$ definiert durch

$$\dot{f}^{\mathfrak{A}}(x, y) := 1 + \max(x, y) - \min(x, y)$$

Sei $\mathcal{I} = (\mathfrak{A}, \beta)$ die σ-Interpretation mit der Belegung $\beta\colon \textsc{Var} \rightarrow A$, für die gilt:

$$\beta(v_0) = 3,\ \beta(v_1) = 1,\ \beta(v_2) = 9,\ \text{ und } \beta(v_i) = 5 \text{ für alle } i \geq 3.$$

Außerdem seien der σ-Term t_1 und die beiden FO[σ]-Formeln φ_1 und φ_2 wie folgt gegeben:

(i) $t_1 := \dot{f}(\dot{f}(v_0, \dot{c}), v_2)$

(ii) $\varphi_1 := \big(\dot{R}(v_6, v_2) \rightarrow \dot{R}(v_2, v_2)\big)$

(iii) $\varphi_2 := \forall v_0\, \forall v_1 \big(\dot{f}(v_0, v_1) \doteq \dot{f}(v_0, \dot{c}) \rightarrow \dot{R}(v_1, v_0)\big)$

Berechnen Sie $[\![t_1]\!]^{\mathcal{I}}$ für den σ-Term t_1 analog zu Beispiel 6.17 aus dem Skript. Berechnen Sie weiterhin $[\![\varphi_1]\!]^{\mathcal{I}}$ und $[\![\varphi_2]\!]^{\mathcal{I}}$ für die FO[σ]-Formeln φ_1 und φ_2 analog zu Beispiel 6.28 im Skript.

Aufgabe 2: **(28 Punkte)**

Betrachten Sie die Kinodatenbank $\mathfrak{A}_{\text{Kino}}$ aus der Vorlesung.

(a) Geben Sie für die folgenden Anfragen jeweils eine Formel φ der Logik erster Stufe an, die die Anfrage beschreibt. Berechnen Sie jeweils auch die Relation $\varphi(\mathfrak{A}_{\text{Kino}})$.

(i) Geben Sie die Namen aller Kinos aus, in denen (mindestens) ein Film gezeigt wird.

(ii) Geben Sie die Namen aller Kinos aus, in denen exakt ein Film gezeigt wird.

(iii) Geben Sie die Telefonnummern aller Kinos aus, in denen Capote gezeigt wird, aber nie um 20:15 Uhr.

(iv) Geben Sie die Namen aller Filme aus, die gerade nicht in einem Kino laufen.

(v) Geben Sie alle Adressen von Kinos an, in denen Filme von Christopher J. J. Nolan oder mit Natalie Portman gezeigt werden.

(b) Berechnen Sie für jede der folgenden Formeln φ_i die Relation $\varphi_i(\mathfrak{A}_{\text{Kino}})$ und geben Sie umgangssprachlich an, welche Anfrage durch die Formel φ_i beschrieben wird.

(i) $\varphi_1(x_{\text{T}}) \; = \exists x \left(\dot{\mathit{Progamm}}(\text{‘Babylon’}, x_{\text{T}}, x) \lor \dot{\mathit{Filme}}(x_{\text{T}}, x, \text{‘Nadja Uhl’}) \right)$

(ii) $\varphi_2(x_{\text{K}}, x_{\text{A}}) \; = \; \exists x_{\text{Tel}} \left(\dot{\mathit{Orte}}(x_{\text{K}}, x_{\text{A}}, x_{\text{Tel}}) \land \forall x_{\text{T}} \forall x_{\text{Z}} \neg \dot{\mathit{Programm}}(x_{\text{K}}, x_{\text{T}}, x_{\text{Z}}) \right)$

(iii)
$$\begin{aligned}\varphi_3(x_{\text{K}}, x_{\text{Z}}) \; = \; \Big(& \exists x_{\text{T}}\, \dot{\mathit{Programm}}(x_{\text{K}}, x_T, x_Z) \land \forall y_{\text{T}} \forall y_{\text{Z}} \big(\dot{\mathit{Programm}}(x_{\text{K}}, y_T, y_Z) \rightarrow \\ & \neg \exists x_{\text{S}} \exists x_{\text{R}} \big(\dot{\mathit{Filme}}(y_{\text{T}}, x_{\text{R}}, x_{\text{S}}) \\ & \land (x_{\text{S}} \doteq \text{‘George Clooney’} \lor x_{\text{R}} \doteq \text{‘George Clooney’}) \big) \big) \Big)\end{aligned}$$

Aufgabe 3: **(24 Punkte)**

(a) Welche der folgenden Aussagen sind korrekt, welche nicht? (Sie brauchen Ihre Antwort nicht zu begründen.)

(i) $\forall x \varphi \; \equiv \; \neg \exists x \neg \varphi$

(ii) $\forall x \varphi \; \models \; \exists x \varphi$

(iii) $\exists x(\varphi \land \psi) \; \models \; (\exists x \varphi \land \exists x \psi)$

(iv) $(\exists x \varphi \land \exists x \psi) \; \models \; \exists x(\varphi \land \psi)$

(v) $(\exists x \varphi \land \exists x \psi) \; \equiv \; \exists x(\varphi \land \psi)$

(vi) $(\forall x \varphi \land \forall x \psi) \; \equiv \; \forall x(\varphi \land \psi)$

(b) Beweisen Sie, dass Ihre Antworten zu (iii) und (iv) aus (a) korrekt sind.

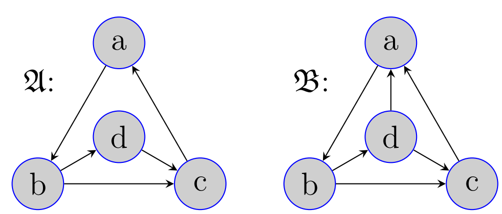
(c) Zeigen Sie die Korrektheit der Beobachtung 6.40 (b) aus dem Skript, d.h. zeigen Sie, dass für jede Signatur σ und zwei beliebige FO[σ]-Formeln φ und ψ gilt:

$$\varphi \; \equiv \; \psi \qquad \Longleftrightarrow \qquad (\varphi \leftrightarrow \psi) \; \text{ist allgemeingültig.}$$

Aufgabe 4: **(24 Punkte)**

Sei $\sigma_{Graph} := \{\dot{E}\}$ die Signatur aus Beispiel 6.8 mit einem 2-stelligen Relationssymbol $\dot{E}$ zur Modellierung von gerichteten Graphen.

(a) Betrachten Sie die beiden σ_{Graph}-Strukturen $\mathfrak{A} = (A, \dot{E}^{\mathfrak{A}})$ und $\mathfrak{B} = (A, \dot{E}^{\mathfrak{B}})$, die durch die beiden Graphen in der nebenstehenden Abbildung repräsentiert werden. Geben Sie einen FO[σ_{Graph}]-Satz φ an, so dass $\mathfrak{A} \models \varphi$ und $\mathfrak{B} \models \neg\varphi$ gilt.



(b) Geben Sie für die FO[σ_{Graph}]-Formel

$$\varphi(x) \; := \; \forall y \forall z \Big(\big(\neg y \doteq z \land \dot{E}(y,z) \big) \rightarrow \big(\dot{E}(y,x) \land \dot{E}(x,z) \big) \Big)$$

eine σ_{Graph}-Struktur $\mathfrak{A}$ und zwei Interpretationen $\mathcal{I}_1 = (\mathfrak{A}, \beta_1)$ und $\mathcal{I}_2 = (\mathfrak{A}, \beta_2)$ an, so dass $\mathcal{I}_1 \models \varphi$ und $\mathcal{I}_2 \models \neg\varphi$ gilt.

(c) Entscheiden Sie, ob FO[σ_{Graph}]-Formeln φ und ψ mit freien Variablen x und y existieren, so dass für jeden gerichteten Graphen $\mathfrak{A} = (A, \dot{E}^{\mathfrak{A}})$ und jede zu φ und ψ passende Belegung β in $\mathfrak{A}$ gilt:

(i) $(\mathfrak{A}, \beta)$ erfüllt $\varphi \Longleftrightarrow \beta(x)$ und $\beta(y)$ liegen zusammen auf einem Kreis in $\mathfrak{A}$

(ii) $(\mathfrak{A}, \beta)$ erfüllt $\psi \Longleftrightarrow \beta(x)$ und $\beta(y)$ liegen zusammen auf einem Kreis der Länge vier in $\mathfrak{A}$