Goethe-Universität Frankfurt am Main
Institut für Informatik
Theorie komplexer Systeme
Prof. Dr. Nicole Schweikardt

12. Januar 2011

Diskrete Modellierung

Wintersemester 2010/2011

Übungsblatt 10

Abgabe: *bis 19. Januar 2011, 8.15 Uhr (vor der Vorlesung oder in Raum RM 11-15/113)*

ACHTUNG: Fehlt eine der drei Angaben Name, Matrikelnummer und Übungsgruppe auf Ihrer Abgabe, müssen Sie mit Punktabzug rechnen. *Mehrseitige Abgaben müssen* ***zusammengeheftet*** *werden.*
Eine Aufgabe gilt nur dann als bearbeitet, wenn neben der Lösung auch die notwendigen Begründungen angegeben sind – es sei denn, in der Aufgabenstellung steht, dass eine solche Begründung nicht erforderlich ist.

Aufgabe 1: (28 Punkte)

Sei $\sigma = \{\dot{M}, \dot{D}, \dot{F}, \dot{Nachfolger}, \dot{letzter}\}$ eine Signatur, wobei $\dot{M}, \dot{D}, \dot{F}$ 1-stellige Relationssymbole, $\dot{Nachfolger}$ ein 1-stelliges Funktionssymbol und $\dot{letzter}$ ein Konstantensymbol ist. Sei $\mathcal{A}$ eine σ-Struktur mit $A = \{1, 2, \dots, 34\}$ und $\dot{letzter}^{\mathcal{A}} = 34$, so dass für alle $a \in A$ gilt:

- $a \in \dot{M}^{\mathcal{A}} \iff$ 1. FSV Mainz 05 ist Tabellenführer an Spieltag a
- $a \in \dot{D}^{\mathcal{A}} \iff$ Borussia Dortmund ist Tabellenführer an Spieltag a
- $a \in \dot{F}^{\mathcal{A}} \iff$ Eintracht Frankfurt ist Tabellenführer an Spieltag a
- $\dot{Nachfolger}^{\mathcal{A}}(a) = \begin{cases} a+1, & \text{falls } a \in \{1, 2, \dots, 33\} \\ a, & \text{falls } a = 34. \end{cases}$

(a) Geben Sie FO[σ]-Formeln an, die in $\mathcal{A}$ folgendes aussagen:

(i) Der 1. FSV Mainz 05 wird Meister.
(ii) Jede der drei genannten Mannschaften ist mindestens einmal Tabellenführer.
(iii) Ist Eintracht Frankfurt an einem Spieltag Erster, so werden sie auch Meister.
(iv) Borussia Dortmund holt den Titel, wenn sie bereits am vorletzten Spieltag Tabellenführer sind.

(b) Beschreiben Sie umgangssprachlich, was jede der folgenden FO[σ]-Formeln in $\mathcal{A}$ aussagt:

(i) $\neg\exists x\Big(\neg\big((\dot{M}(x) \vee \dot{D}(x)) \vee \dot{F}(x) \big) \Big)$

(ii) $\Big(\neg\exists x\big(\dot{D}(x) \wedge \neg x \doteq \dot{letzter}\big) \;\to\; \neg\dot{D}(\dot{letzter}) \Big)$

(iii) $\forall x\Big(\big((\neg\dot{Nachfolger}(x) \doteq \dot{letzter} \wedge \dot{F}(x)) \wedge \dot{F}(\dot{Nachfolger}(x)) \big) \to \neg\dot{F}\big(\dot{Nachfolger}(\dot{Nachfolger}(x))\big) \Big)$

Aufgabe 2: **(26 Punkte)**

Sei $\sigma := \{\dot{f}, \dot{Q}, \dot{c}\}$ eine Signatur mit einem 1-stelligen Funktionssymbol $\dot{f}$, einem 3-stelligen Relationssymbol $\dot{Q}$ und einem Konstantensymbol $\dot{c}$.

(a) Überprüfen Sie für jedes der folgenden Wörter, ob es sich jeweils um einen σ-Term (gemäß Definition 6.13), um eine atomare σ-Formel bzw. um eine FO$[\sigma]$-Formel (gemäß Definition 6.19) handelt. Begründen Sie gegebenenfalls, warum ein Wort kein σ-Term, keine atomare σ-Formel bzw. keine FO$[\sigma]$-Formel darstellt.

(i) $\dot{Q}\big(\dot{f}(v_2), v_4, \dot{c}\big)$

(ii) $\dot{Q}\big(\dot{f}(v_2), v_4\big)$

(iii) $\big(\dot{f}(\dot{c}) \leftrightarrow \dot{Q}(v_1, v_2, v_3)\big)$

(iv) $\forall v_9\, \dot{f}\big(\dot{f}(\dot{f}(\dot{c}))\big) \doteq \dot{f}(\dot{Q}(\dot{c}, v_9, v_9))$

(v) $\exists v_9\, \dot{f}\big(\dot{f}(\dot{f}(\dot{c}))\big) \doteq \dot{f}(v_8)$

(vi) $\exists v_1 \forall v_2 \big(\dot{f}(\dot{c}) \doteq \dot{c} \vee \forall v_5 (\dot{Q}(v_1, v_2, v_4) \rightarrow \dot{Q}(v_1, v_3, v_4))\big)$

(b) Betrachten Sie die drei σ-Strukturen $\mathfrak{A} = (A, \dot{f}^{\mathfrak{A}}, \dot{Q}^{\mathfrak{A}}, \dot{c}^{\mathfrak{A}})$, $\mathfrak{B} = (B, \dot{f}^{\mathfrak{B}}, \dot{Q}^{\mathfrak{B}}, \dot{c}^{\mathfrak{B}})$ und $\mathfrak{C} = (C, \dot{f}^{\mathfrak{C}}, \dot{Q}^{\mathfrak{C}}, \dot{c}^{\mathfrak{C}})$ wobei

- $A := \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $\quad \dot{Q}^{\mathfrak{A}} := \{(5, 5, 1), (2, 3, 4)\}$, $\quad \dot{c}^{\mathfrak{A}} := 2$
- $B := \{a, b, c, d, e\}$, $\quad \dot{Q}^{\mathfrak{B}} := \{(a, e, c), (b, b, d)\}$, $\quad \dot{c}^{\mathfrak{B}} := a$
- $C := \{k, l, m, n, o\}$, $\quad \dot{Q}^{\mathfrak{C}} := \{(n, n, m), (l, k, o)\}$, $\quad \dot{c}^{\mathfrak{C}} := l$

und die Funktionen $\dot{f}^{\mathfrak{A}} \colon A \to A$, $\dot{f}^{\mathfrak{B}} \colon B \to B$ und $\dot{f}^{\mathfrak{C}} \colon C \to C$ definiert sind durch

x	1	2	3	4	5
$\dot{f}^{\mathfrak{A}}(x)$	2	1	4	3	5

x	a	b	c	d	e
$\dot{f}^{\mathfrak{B}}(x)$	d	b	e	a	c

x	k	l	m	n	o
$\dot{f}^{\mathfrak{C}}(x)$	l	k	n	m	o

Überprüfen Sie jeweils, ob $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$ und ob $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{C}$ gilt. Falls ja, geben Sie einen entsprechenden Isomorphismus an und begründen Sie, warum es sich um einen Isomorphismus handelt. Falls nein, begründen Sie, warum es keinen entsprechenden Isomorphismus gibt.

Aufgabe 3: **(20 Punkte)**

Sei $\sigma := \{\dot{E}, \dot{g}\}$ eine Signatur mit einem 2-stelligen Relationssymbol $\dot{E}$ und einem 1-stelligen Funktionssymbol $\dot{g}$. Geben Sie für jede der folgenden FO$[\sigma]$-Formeln je eine σ-Struktur an, die die Formel erfüllt, und eine, die die Formel nicht erfüllt.

(a) $\forall x \forall y \big(\dot{E}(x, y) \vee \dot{E}(y, x) \big)$

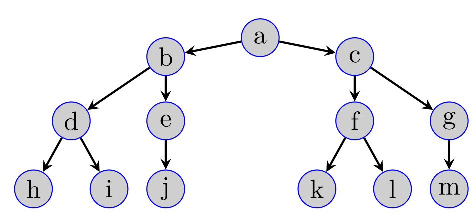
(b) $\Big(\forall x \forall y \big(\dot{E}(x, y) \rightarrow \dot{g}(x) \doteq \dot{g}(y) \big) \vee \neg \exists x\, \dot{E}(x, x) \Big)$

(c) $\Big(\forall x \forall y \forall z \Big(\big(\dot{E}(x, y) \wedge \dot{E}(y, z) \big) \rightarrow \dot{E}(x, z) \Big) \wedge \exists x \exists y \big(\dot{E}(x, y) \leftrightarrow \dot{E}(y, x) \big) \Big)$

Aufgabe 4: **(26 Punkte)**

In dieser Aufgabe sollen gerichtete Bäume durch Strukturen über einer Signatur mit einem 1-stelligen Funktionssymbol $\dot{\textit{Elternknoten}}$ repräsentiert werden.

(a) Beschreiben Sie, wie ein gegebener gerichteter Baum $B = (V, E)$ durch eine Struktur über der Signatur $\sigma := \{\dot{\textit{Elternknoten}}\}$ modelliert werden kann. Geben Sie außerdem die entsprechende Struktur für den nebenstehenden gerichteten Baum an.



(b) Geben Sie je eine Formel $\varphi(x)$ der Logik erster Stufe an, die aussagt, dass der Knoten x

(i) ein Blatt ist,

(ii) die Wurzel ist,

(iii) mindestens zwei Kinder hat,

(iv) genau zwei Kinder hat.