Goethe-Universität Frankfurt am Main
Institut für Informatik
Theorie komplexer Systeme
Prof. Dr. Nicole Schweikardt

22. Dezember 2010

Diskrete Modellierung

Wintersemester 2010/2011

Übungsblatt 9

Abgabe: *bis 12. Januar 2011, 8.15 Uhr (vor der Vorlesung oder in Raum RM 11-15/113)*

ACHTUNG: Fehlt eine der drei Angaben Name, Matrikelnummer und Übungsgruppe auf Ihrer Abgabe, müssen Sie mit Punktabzug rechnen. *Mehrseitige Abgaben müssen **zusammengeheftet** werden.*
Eine Aufgabe gilt nur dann als bearbeitet, wenn neben der Lösung auch die notwendigen Begründungen angegeben sind – es sei denn, in der Aufgabenstellung steht, dass eine solche Begründung nicht erforderlich ist.

Aufgabe 1: (25 Punkte)

Für Belegungen $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$ mit $\text{Def}(\mathcal{B}) = \text{Def}(\mathcal{B}') = \textsc{Avar}$ schreiben wir $\mathcal{B} \preceq \mathcal{B}'$, wenn für alle $X \in \textsc{Avar}$ gilt:

$$\mathcal{B}(X) \leq \mathcal{B}'(X)$$

(d.h.: wenn $\mathcal{B}(X) = 1$ ist, so ist auch $\mathcal{B}'(X) = 1$).

Eine aussagenlogische Formel φ heißt *monoton*, falls für alle zu φ passenden Belegungen $\mathcal{B}$ und $\mathcal{B}'$ mit $\mathcal{B} \preceq \mathcal{B}'$ gilt:

$$\text{Falls } [\![\varphi]\!]^{\mathcal{B}} = 1, \text{ so } [\![\varphi]\!]^{\mathcal{B}'} = 1.$$

(a) Geben Sie je ein Beispiel für eine monotone und für eine nicht monotone aussagenlogische Formel an.

Die Menge AL_+ ist die Teilmenge aller aussagenlogischen Formeln, in denen keines der Symbole $\neg$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$ vorkommt.

(b) Geben Sie eine exakte rekursive Definition der Formelmenge AL_+ an.

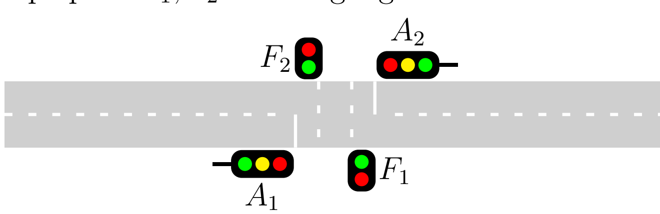
(c) Beweisen Sie, dass alle Formeln $\varphi \in \text{AL}_+$ monoton sind.

(d) Existiert eine monotone aussagenlogische Formel $\varphi \in \text{AL}$, in der Negationszeichen vorkommen?

(e) Existiert eine monotone aussagenlogische Formel $\varphi \in \text{AL}$, in der genau ein Negationszeichen vorkommt?

Aufgabe 2: (25 Punkte)

(a) An einer Straße befinden sich Ampeln für Autos und Fußgänger, d.h. ein Ampelpaar A_1, A_2 für Autos und ein Ampelpaar F_1, F_2 für Fußgänger:



Natürlich zeigen die Ampeln A_1 und A_2 immer die gleichen Farben an. Analog für die Fußgängerampeln F_1 und F_2.

Mit Hilfe der folgenden atomaren Aussagen lassen sich nun einfache Anforderungen an die Ampeln formulieren:

- X_{rot}: Die Ampeln A_1, A_2 zeigen *rot*.
- X_{gelb}: Die Ampeln A_1, A_2 zeigen *gelb*.
- $X_{\text{grün}}$: Die Ampeln A_1, A_2 zeigen *grün*.
- $X_{\text{Fußgänger}}$: Die Fußgängerampeln F_1, F_2 zeigen grün.

Beispielsweise drückt die aussagenlogische Formel $\big((X_{\text{rot}} \wedge X_{\text{gelb}}) \wedge \neg X_{\text{grün}}\big)$ aus, dass die Ampeln A_1, A_2 rot und gelb anzeigen, jedoch nicht grün.

Geben Sie aussagenlogische Formeln an, die Folgendes aussagen:

(i) Falls die Fußgängerampeln F_1, F_2 grün anzeigen, dann zeigen die Ampeln A_1, A_2 nicht grün und auch nicht gelb.

(ii) Es gilt, dass die Ampeln A_1, A_2 nur zulässige Farbkombinationen anzeigen, d.h. die Ampeln A_1, A_2 zeigen (1) *nur* die Farbe *rot*, (2) *nur* die Farben *rot und gelb*, (3) *nur* die Farbe *grün* oder (4) *nur* die Farbe *gelb* an.

(b) Geben Sie für jede der folgenden aussagenlogischen Formeln an, ob sie erfüllbar, unerfüllbar und/oder allgemeingültig ist. Geben Sie außerdem folgendes für jede Formel an: Falls die Formel erfüllbar ist, geben Sie eine zur Formel passende Belegung an, die die Formel erfüllt. Falls die Formel nicht allgemeingültig ist, geben Sie eine zur Formel passende Belegung an, die die Formel *nicht* erfüllt.

(i) $\varphi \;=\; \big((X_2 \rightarrow X_1) \vee \neg X_1\big)$

(ii) $\psi \;=\; \Big(\;(X_1 \rightarrow X_2) \wedge \Big((X_1 \wedge \neg X_3) \;\rightarrow\; (X_2 \vee X_4)\Big)\Big)$

(c) Welche der folgenden Aussagen ist wahr, welche falsch?

Für jede richtige Antwort bekommen Sie einen Punkt, für jede **falsche** Antwort wird ein Punkt **abgezogen**. Die Gesamtpunktzahl ist aber mindestens 0. Sie brauchen Ihre Antwort nicht zu begründen.

(i) Eine aussagenlogische Formel φ ist genau dann allgemeingültig, wenn $\neg\varphi$ unerfüllbar ist.

(ii) Eine aussagenlogische Formel φ ist genau dann erfüllbar, wenn $\neg\varphi$ unerfüllbar ist.

(iii) Zwei aussagenlogische Formeln φ und ψ sind genau dann äquivalent, wenn gilt, dass $\varphi \models \psi$ und $\psi \models \varphi$.

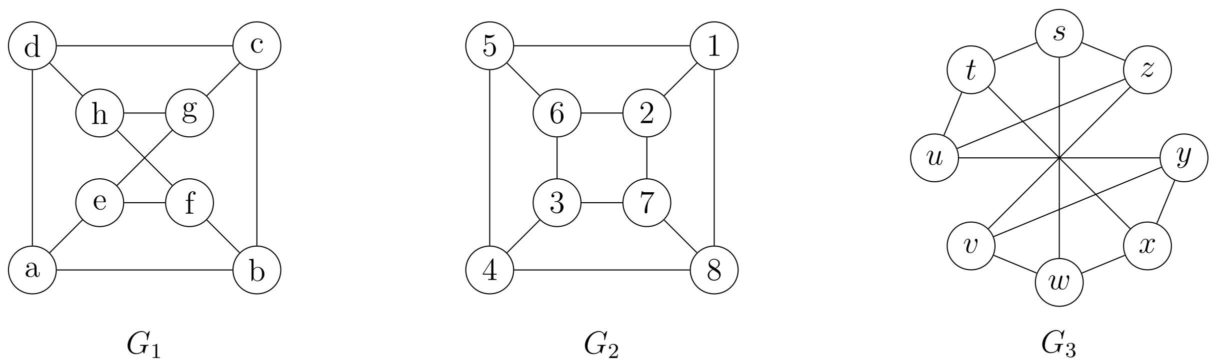
(d) Geben Sie eine zur Formel

$$\varphi \;:=\; \big(X_1 \wedge \neg(X_2 \wedge \neg X_3)\big)$$

äquivalente aussagenlogische Formel in disjunktiver Normalform an.

Aufgabe 3: **(25 Punkte)**

(a) Es seien die folgenden drei ungerichteten Graphen G_1, G_2 und G_3 gegeben.



(i) Geben Sie für G_1, G_2 und G_3 jeweils einen Knoten maximalen Grades und einen Knoten minimalen Grades an.

(ii) Geben Sie für G_1, G_2 und G_3 jeweils ein Matching maximaler Größe an.

(iii) Enthalten die Graphen G_1, G_2 und G_3 jeweils einen Euler-Weg?

(iv) Enthalten die Graphen G_1, G_2 und G_3 jeweils einen Hamilton-Weg?

(v) Gilt $G_1 \cong G_2$, gilt $G_2 \cong G_3$?

(vi) Geben Sie jeweils die chromatische Zahl für G_1, G_2 und G_3 an.

(vii) Ist G_3 planar?

(b) Auf dem Weihnachtsmarkt von Großdorf sollen insgesamt 8 Stände rund um den Marktplatz arrangiert werden. Die 8 Stände setzen sich folgendermaßen zusammen:

- Ein Stand, in dem die traditionelle Weihnachtskrippe aufgebaut ist.
- Zwei Stände, an denen Kunsthandwerk verkauft wird: einer der beiden Stände ist die Töpferei, der andere bietet Holzschmuck aus dem Erzgebirge an.
- Zwei Glühweinstände; einer davon wird von Herrn Max, der andere von Frau Peters betrieben.
- Drei Essensstände; einer davon verkauft Crêpes, der andere Waffeln und der dritte Steaks vom Holzkohlegrill.

Bei der Platzierung der 8 Stände um den Marktplatz ist folgendes zu beachten: Neben der Weihnachtskrippe darf keiner der Glühweinstände platziert werden. Essensstände dürfen nicht nebeneinander stehen, die beiden Glühweinstände dürfen nicht nebeneinander stehen, und die beiden Kunsthandwerkstände dürfen nicht nebeneinander stehen. Aus Sicherheitsgründen darf der Holzkohlegrill weder neben der Weihnachtskrippe noch neben dem Stand mit dem Holzschmuck aus dem Erzgebirge stehen. Herr Max ist mit den Besitzern des Holzkohlegrills und der Töpferei befreundet und möchte daher unbedingt die beiden als Nachbarn haben. Außerdem ist zu beachten, dass sich der Betreiber des Waffelstands weder mit Frau Peters noch mit dem Besitzer der Töpferei verträgt und daher auf keinen Fall neben einem der beiden platziert werden will.

(i) Stellen Sie den Konfliktgraph auf, in dem die Stände durch Knoten repräsentiert werden und eine Kante zwischen zwei Knoten anzeigt, dass die entsprechenden Stände nicht nebeneinander platziert werden können.

(ii) Geben Sie das Komplement des Konfliktgraphen an.

(iii) Geben Sie einen Hamilton-Kreis im Komplement des Konfliktgraphen an.

(iv) Geben Sie eine Platzierung der 8 Stände rund um den Marktplatz an, mit der alle zufrieden sind.

Aufgabe 4: (25 Punkte)

Wir nehmen an, das morgige Wetter ließe sich allein aus der Kenntnis des heutigen Wetters vorhersagen. Unter dieser Annahme kann der Wetterverlauf als Markov-Kette modelliert werden. Der Einfachheit halber unterscheiden wir im Folgenden nur die beiden Wetterbedingungen *Regen* und *Sonnenschein*. Das Wetter formt dann eine Markov-Kette mit der Zustandsmenge $Z = \{z_1, z_2\}$, wobei z_1 den Regen und z_2 den Sonnenschein bezeichnet, und der Übergangsmatrix

$$P = \begin{pmatrix} p_{z_1,z_1} & p_{z_1,z_2} \\ p_{z_2,z_1} & p_{z_2,z_2} \end{pmatrix}.$$

Dabei gibt der Wert p_{z_i,z_j} die Wahrscheinlichkeit dafür an, dass auf Wetter im Zustand z_i am folgenden Tag Wetter im Zustand z_j folgt.

Ist die Verteilung des Wetters $X^{(k)} = (X^{(k)}_{z_1}, X^{(k)}_{z_2})$ für einen Tag $k \in \mathbb{N}$ bekannt, so kann die Verteilung des Wetters am Tag $k+1$ berechnet werden als $X^{(k+1)} = X^{(k)} \cdot P$.

(a) Für das Frankfurter Wetter wird oft behauptet, die beste Art der Wettervorhersage bestehe einfach darin, das morgige Wetter als identisch mit dem heutigen zu prognostizieren. Wenn diese Vorhersagemethode mit einer Wahrscheinlichkeit von 3/4 richtig liegt (unabhängig davon, ob aktuell Regen oder Sonnenschein herrscht), dann ergibt sich für die Markov-Kette des Frankfurter Wetters die Übergangsmatrix

$$P_F = \begin{pmatrix} 3/4 & 1/4 \\ 1/4 & 3/4 \end{pmatrix}.$$

Wir nehmen an, dass die Markov-Kette für das Frankfurter Wetter an einem regnerischen Tag beginnt, d. h. es gilt $X_F^{(0)} = (1, 0)$.

(i) Berechnen Sie die Verteilung des Frankfurter Wetters an Tag drei, d. h. berechnen Sie $X_F^{(3)}$.

(ii) Beweisen Sie durch vollständige Induktion, dass $X_F^{(k)} = \left(\frac{1}{2}(1 + 2^{-k}), \frac{1}{2}(1 - 2^{-k})\right)$ für jedes $k \in \mathbb{N}$ gilt.

(iii) Wie verhält sich $X_F^{(k)}$, wenn k gegen unendlich geht?

(b) Wir betrachten Los Angeles als Beispiel für einen Ort, an dem der Wetterverlauf ein anderer ist als in Frankfurt. Sei die Übergangsmatrix für das Wetter in Los Angeles gegeben durch

$$P_{LA} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/10 & 9/10 \end{pmatrix}.$$

(i) Zeigen Sie, dass die Verteilung $X_{LA} = (1/6,\ 5/6)$ eine stationäre Verteilung für das Wetter in Los Angeles ist, d. h. zeigen Sie, dass $X_{LA} = X_{LA} \cdot P_{LA}$ ist.

(ii) Geben Sie eine stationäre Verteilung für das Frankfurter Wetter in Teilaufgabe (a) an, d. h. geben Sie eine Verteilung X_F an mit $X_F \cdot P_F = X_F$.

Frohe Weihnachten und einen Guten Rutsch ins neue Jahr!