Goethe-Universität Frankfurt am Main
Institut für Informatik
Theorie komplexer Systeme
Prof. Dr. Nicole Schweikardt

15. Dezember 2010

Diskrete Modellierung

Wintersemester 2010/2011

Übungsblatt 8

Abgabe: *bis 22. Dezember 2010, 8.^{15} Uhr (vor der Vorlesung oder in Raum RM 11-15/113)*

ACHTUNG: Fehlt eine der drei Angaben Name, Matrikelnummer und Übungsgruppe auf Ihrer Abgabe, müssen Sie mit Punktabzug rechnen. *Mehrseitige Abgaben müssen **zusammengeheftet** werden.*
Eine Aufgabe gilt nur dann als bearbeitet, wenn neben der Lösung auch die notwendigen Begründungen angegeben sind – es sei denn, in der Aufgabenstellung steht, dass eine solche Begründung nicht erforderlich ist.

Aufgabe 1: **(25 Punkte)**

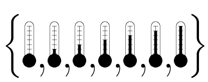
(a) Betrachten Sie die Relation $R := \{(a,b),(a,d),(b,c),(c,d),(d,a),(d,b),(e,e)\}$ über der Menge $A := \{a,b,c,d,e\}$. Ist es möglich, durch Hinzufügen von Paaren $(x,y) \in A \times A$ die Relation R so zu erweitern, dass für die Erweiterungen R_r, R_s, R_a, R_k, R_t und R_p gilt:

(i) R_r ist reflexiv,
(ii) R_s ist symmetrisch,
(iii) R_a ist antisymmetrisch,
(iv) R_k ist konnex,
(v) R_t ist transitiv,
(vi) R_p ist eine Präordnung?

Geben Sie jeweils, falls existent, eine möglichst kleine Erweiterung von R an.

(b) Betrachten Sie die folgenden Relationen R_i über der jeweiligen Menge M_i.

(i) $M_1 := \{\clubsuit, \spadesuit, \heartsuit, \diamondsuit\}$, $R_1 := \{(\clubsuit,\spadesuit),(\clubsuit,\heartsuit),(\clubsuit,\diamondsuit),(\spadesuit,\heartsuit),(\spadesuit,\diamondsuit),(\heartsuit,\diamondsuit)\}$

(ii) $M_2 :=$ , $R_2 := \left\{ (x,y) \in M_2 \times M_2 \ : \begin{array}{c} x \text{ zeigt Temperatur } x_1 \text{ an,} \\ y \text{ zeigt Temperatur } y_1 \text{ an} \\ \text{und } x_1 \leq y_1 \end{array} \right\}$

(iii) $M_3 := \mathcal{P}(\mathbb{N}_{>0})$, $R_3 := \{(a,b) \in M_3 \times M_3 \ : \ a \cap b = \emptyset\}$.

Stellen Sie R_1 durch einen gerichteten Graphen in graphischer Darstellung dar.
Geben Sie für jedes $i \in \{1,2,3\}$ an, welche Eigenschaften (reflexiv, symmetrisch, antisymmetrisch, konnex, transitiv) die Relation R_i jeweils besitzt.

(c) Für Worte über dem Alphabet A definieren wir folgende Relation:

$$\text{Prä}_A := \{(a,b) \in A^* \times A^* \ : \ \text{ex. } c \in A^*, \text{ s.d. } ac = b\}$$

Für den Fall, dass $(a,b) \in \text{Prä}_A$ heißt a *Präfix* von b.

(i) Zeigen Sie, dass für jedes Alphabet A gilt: Prä_A ist eine partielle Ordnung.

(ii) Geben Sie zwei Alphabete A_1 und A_2 an, so dass

(I.) Prä_{A_1} eine lineare Ordnung ist, (II.) Prä_{A_2} keine lineare Ordnung ist.

Aufgabe 2: **(25 Punkte)**

Zeigen Sie, dass die im Folgenden angegebenen Relationen R_1 und R_2 jeweils Äquivalenzrelationen sind. Geben Sie jeweils jede Äquivalenzklasse von R_1 und R_2 sowie jeweils den Index von R_1 und R_2 an. Geben Sie für jede Äquivalenzklasse von R_1 bzw. R_2 jeweils einen Vertreter an.

(a) Zwei Zahlen $a, b \in \mathbb{N}$ heißen *kongruent modulo* 5 (geschrieben als $a \equiv b \mod 5$), wenn die Zahl $a - b$ durch 5 teilbar ist, d.h. es gibt ein $z \in \mathbb{Z}$, so dass $a - b = 5 \cdot z$. Dann sei

$$R_1 := \{(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \,:\, a \equiv b \mod 5\}.$$

(b) Wir definieren $\mathrm{AL}_{|V_0} := \{\varphi \in \mathrm{AL} \,:\, \mathrm{Var}(\varphi) = \{V_0\}\}$ als die Menge aller syntaktisch korrekten aussagenlogischen Formeln, die außer V_0 keine weiteren Aussgenvariablen enthalten. Dann sei

$$R_2 := \{(\varphi, \psi) \in \mathrm{AL}_{|V_0} \times \mathrm{AL}_{|V_0} \,:\, \varphi \equiv \psi\}.$$

Aufgabe 3: **(25 Punkte)**

Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Eine Relation ist genau dann transitiv, wenn sie symmetrisch und konnex ist.

(b) Jede Relation, die nicht konnex ist, ist auch nicht reflexiv.

(c) Es gibt keine Relation, die gleichzeitig antisymmetrisch, symmetrisch und konnex ist.

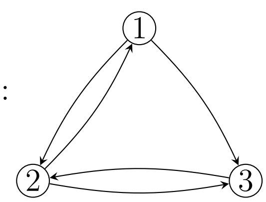
(d) Der Index jeder antisymmetrischen Äquivalenzrelation über einer endl. Menge M ist $|M|$.

(e) Die Vereinigung von zwei Äquivalenzrelationen ist wieder eine Äquivalenzrelation.

Aufgabe 4: **(25 Punkte)**

Betrachten Sie den Web-Graph $G = (V, E)$, der aus den drei Webseiten 1, 2 und 3 besteht, die wie in der nebenstehenden Abbildung miteinander verlinkt sind. Benutzen Sie für die folgenden Aufgaben den Dämpfungsfaktor $d := \frac{2}{3}$.

G :



(a) Berechnen Sie ähnlich wie in Beispiel 5.2 aus dem Skript die Page-Ranks PR_1, PR_2 und PR_3 der drei Webseiten von G bezüglich des Dämpfungsfaktors d.

(b) Stellen Sie für den angegebenen Web-Graph G und den Dämpfungsfaktor d die Page-Rank-Matrix $P(G, d)$ auf.

(c) Sei P die Page-Rank-Matrix $P(G, d)$ aus Teilaufgabe (b). Angenommen der Zufalls-Surfer startet auf einer der drei Webseiten von G, wobei er jede Webseite gleichwahrscheinlich als Startpunkt wählen kann. Das bedeutet, dass die Anfangsverteilung für den Zufalls-Surfer durch $X^{(0)} := (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ beschrieben wird. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung des Zufalls-Surfers auf den Knoten von G nach einem Schritt (d.h. $X^{(1)}$), nach zwei Schritten (d.h. $X^{(2)}$) und nach drei Schritten (d.h. $X^{(3)}$). Dabei ist $X^{(1)} := X^{(0)} \cdot P$, $X^{(2)} := X^{(1)} \cdot P$ und $X^{(3)} := X^{(2)} \cdot P$.

(d) Gesucht ist ein Web-Graph $G' = (V', E')$ mit drei Webseiten, in dem jede Webseite auf mindestens eine Webseite verlinkt, die nicht sie selber ist. Zusätzlich soll der Zufalls-Surfer mit der Anfagsverteilung $X^{(0)} := (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ nach einem Schritt in G' genau die selbe Wahrscheinlichkeitsverteilung erreichen, es soll also $X^{(0)} \cdot P(G', d) = X^{(0)}$ gelten. Geben Sie einen solchen Graphen G' an und weisen Sie nach, dass $X^{(0)} \cdot P(G', d) = X^{(0)}$ gilt.