Goethe-Universität Frankfurt am Main
Institut für Informatik
Theorie komplexer Systeme
Prof. Dr. Nicole Schweikardt

8. Dezember 2010

Diskrete Modellierung

Wintersemester 2010/2011

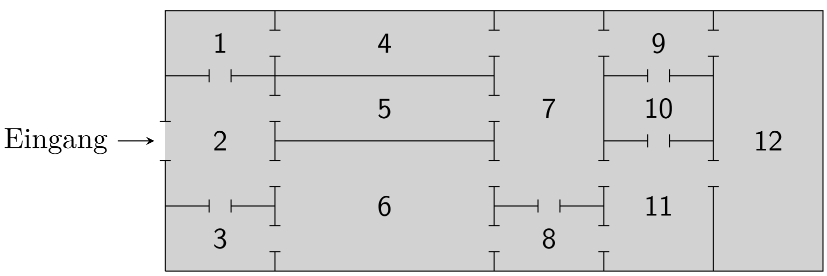
Übungsblatt 7

Abgabe: *bis 15. Dezember 2010, 8.[15] Uhr (vor der Vorlesung oder in Raum RM 11-15/113)*

ACHTUNG: Fehlt eine der drei Angaben Name, Matrikelnummer und Übungsgruppe auf Ihrer Abgabe, müssen Sie mit Punktabzug rechnen. *Mehrseitige Abgaben müssen* ***zusammengeheftet*** *werden.*
Eine Aufgabe gilt nur dann als bearbeitet, wenn neben der Lösung auch die notwendigen Begründungen angegeben sind – es sei denn, in der Aufgabenstellung steht, dass eine solche Begründung nicht erforderlich ist.

Aufgabe 1: **(25 Punkte)**

Ein Reiseleiter plant eine Tour durch ein Museum mit dem abgebildeten Grundriss.



(a) Modellieren Sie den Grundriss des Museums als einen ungerichteten Graphen G. Geben Sie G in graphischer Darstellung so an, dass sich seine Kanten nicht kreuzen.

(b) Gibt es eine Rundtour durch das Museum, die jeden Raum genau einmal besucht? Beweisen Sie, dass Ihre Antwort korrekt ist.

(c) Gibt es eine Tour durch das Museum, die in Raum 2 startet und endet und jede Tür (außer der Eingangstür) genau einmal passiert? Beweisen Sie, dass Ihre Antwort korrekt ist.

(d) Was ist die minimale Anzahl von Türen, die geschlossen werden müssen, damit eine Tour existiert, die in Raum 2 startet und endet und jede der nicht geschlossenen Türen (außer der Eingangstür) genau einmal passiert? Beweisen Sie, dass Ihre Antwort korrekt ist.

Aufgabe 2: **(25 Punkte)**

Sei $G = (V, E)$ ein endlicher ungerichteter planarer Graph mit $V \neq \emptyset$. Dann gilt, dass $|E| < 3 \cdot |V|$.

(a) Benutzen Sie diesen Zusammenhang, um zu beweisen, dass es in G einen Knoten $v \in V$ gibt mit $\text{Grad}_G(v) \leq 5$.

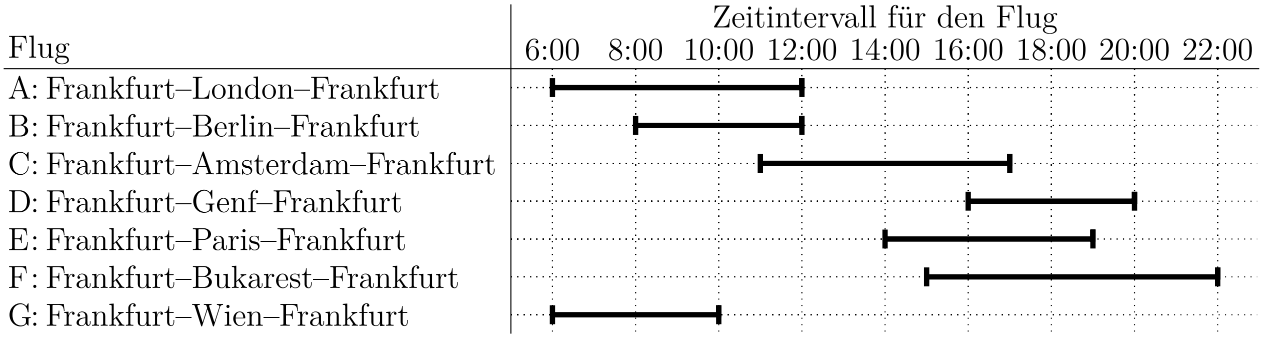
(b) Beweisen Sie, dass die Knoten von G konfliktfrei mit sechs Farben gefärbt werden können. D. h. beweisen Sie, dass für G eine konfliktfreie Knotenmarkierung $m : V \to \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ existiert.[1]

Hinweis: Benutzen Sie eine vollständige Induktion nach $n := |V|$ und die Aussage in Teilaufgabe (a) (auch wenn Sie diese nicht selbst bewiesen haben). Verwenden Sie keine anderen Resultate zur chromatischen Zahl planarer Graphen.

[1]Tatsächlich lassen sich die Knoten jedes planaren Graphen konfliktfrei mit vier Farben färben. Der Beweis dieser als „Vier-Farben-Satz“ bekannten Aussage ist sehr aufwendig. Der hier geforderte Beweis der entsprechenden Aussage für sechs Farben ist wesentlich einfacher.

Aufgabe 3: **(25 Punkte)**

Die kleine Frankfurter Fluggesellschaft Air-Flight hat für den kommenden Freitag sieben Flüge geplant, die wir im Folgenden mit den Buchstaben A–G bezeichnen. Für jeden Flug ist ein Zeitintervall (Abflugzeit bis Ankunftszeit) vorgesehen, in dem der Flug stattfinden soll:



Nun muss jedem Flug eines von fünf Flugzeugen F1–F5 zugeordnet werden, das für den Flug eingesetzt wird. Natürlich dürfen zwei Flüge, die zueinander in Konflikt stehen (d.h. bei denen sich die Zeitintervalle überlappen), nicht dem selben Flugzeug zugeordnet werden.

(a) Geben Sie den Konfliktgraphen an, der als Knotenmenge die Flüge besitzt und bei dem eine Kante einen Konflikt zwischen zwei Flügen anzeigt.

(b) Sei $G = (V, E)$ der Konfliktgraph aus Aufgabenteil (a). Geben Sie eine konfliktfreie Knotenmarkierung $m : V \to \mathbb{N}$ an, die möglichst wenige verschiedene Markierungen verwendet, d. h. $|\mathrm{Bild}(m)|$ soll minimal sein.

(c) Weisen Sie jedem der Flüge A–G genau eines der Flugzeuge F1–F5 zu, so dass Flüge, die zueinander in Konflikt stehen, nicht dem selben Flugzeug zugeordnet sind und möglichst wenige verschiedene Flugzeuge benötigt werden.

(d) Wie viele Flugzeuge werden für die Flüge A–G mindestens benötigt, d. h. wie groß ist die chromatische Zahl des Konfliktgraphen?

Aufgabe 4: **(25 Punkte)**

Alice und Bob spielen das Spiel *Yag* [2] gegeneinander, das wie folgt definiert ist: Die Spieler schreiben gemeinsam eine Folge von Nullen und Einsen auf. Sie beginnen mit der leeren Zeile und sind abwechselnd am Zug, Alice beginnt. Der Spieler am Zug schreibt an das Ende der Zeile eine Null oder eine Eins. Ein Spieler gewinnt, wenn die von ihm hinzugefügte Ziffer einen Block der Länge zwei erzeugt, der in der Folge schon einmal vorkommt. (Dabei werden auch Blöcke betrachtet, die sich überlappen: Der Spieler, der die Folge 0111 erzeugt, gewinnt, da der Block 11 zweimal in der Folge vorkommt.) Haben die Spieler eine Folge der Länge vier erzeugt ohne dass es einen Gewinner gibt, so endet das Spiel unentschieden.

(a) Beschreiben Sie das Spiel durch einen Entscheidungsbaum.

(b) Ist der von Ihnen bei Teilaufgabe (a) aufgestellte Entscheidungsbaum ein Binärbaum? Ist er ein vollständiger Binärbaum?

(c) Was haben alle Spielsituationen gemeinsam, die den Blättern des Entscheidungsbaumes entsprechen? Was haben alle Situationen des Spiels gemeinsam, die durch innere Knoten repräsentiert werden? Welcher Spielsituation entspricht die Wurzel?

(d) Wie viele Runden dauert das Spiel höchstens, d. h. wie groß ist die Höhe des Entscheidungsbaumes? Wie viele Runden dauert das Spiel mindestens, d. h. was ist die kürzeste Länge eines Weges von der Wurzel zu einem Blatt?

(e) Wer gewinnt, wenn beide Spieler optimal spielen, d. h. wenn jeder Spieler immer nur die Ziffer wählt, mit der er – falls dies noch möglich ist – gewinnen kann?

[2] yet another game