Goethe-Universität Frankfurt am Main
Institut für Informatik
Theorie komplexer Systeme
Prof. Dr. Nicole Schweikardt

24. November 2010

Diskrete Modellierung

Wintersemester 2010/2011

Übungsblatt 5

Abgabe: *bis 1. Dezember 2010, 8.15 Uhr (vor der Vorlesung oder in Raum RM 11-15/113)*

ACHTUNG: Fehlt eine der drei Angaben Name, Matrikelnummer und Übungsgruppe auf Ihrer Abgabe, müssen Sie mit Punktabzug rechnen. *Mehrseitige Abgaben müssen **zusammengeheftet** werden.*
Eine Aufgabe gilt nur dann als bearbeitet, wenn neben der Lösung auch die notwendigen Begründungen angegeben sind – es sei denn, in der Aufgabenstellung steht, dass eine solche Begründung nicht erforderlich ist.

Aufgabe 1: **(30 Punkte)**

(a) Entscheiden Sie für jede der folgenden aussagenlogischen Formeln, ob sie jeweils erfüllbar, unerfüllbar und/oder allgemeingültig ist. Geben Sie für jede erfüllbare Formel eine erfüllende Belegung und für jede nicht allgemeingültige Formel eine nicht erfüllende Belegung an.

(i) $(\mathbf{0} \wedge \mathbf{1})$

(ii) $((V_0 \vee \neg V_1) \leftrightarrow V_2)$

(iii) $((V_0 \wedge \neg V_0) \to V_0)$

(iv) $(\neg V_0 \to (V_1 \to V_0))$

(v) $((V_0 \to V_1) \leftrightarrow ((V_0 \wedge \neg V_1) \to \mathbf{0}))$

(vi) $\neg((V_0 \to V_1) \leftrightarrow ((V_0 \wedge \neg V_1) \to \mathbf{0}))$

(vii) $\psi_n := \bigwedge_{i=1}^{n} (V_i \to V_{2i})$ für $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$

(b) Die Menge AL ist nach Definition 3.3 die Menge aller syntaktisch korrekten aussagenlogischen Formeln. Sei $B := \text{Abb}(\textsc{Avar}, \{0,1\})$ die Menge aller möglichen Funktionen $\mathcal{B} : \textsc{Avar} \to \{0,1\}$.

Außerdem definieren wir für jedes $\mathcal{B} \in B$ die Menge $\text{AL}_{\mathcal{B}} := \{\varphi \in \text{AL} : \mathcal{B} \text{ erfüllt } \varphi\}$.

(i) Gibt es Belegungen $\mathcal{B}$ und $\mathcal{B}'$ in B, so dass $\text{AL}_{\mathcal{B}} \cap \text{AL}_{\mathcal{B}'} = \emptyset$ ist? Beweisen Sie, dass Ihre Antwort korrekt ist.

(ii) Existiert ein $\mathcal{B} \in B$, so dass die Menge $\text{AL}_{\mathcal{B}}$ endlich ist ? Beweisen Sie, dass Ihre Antwort korrekt ist.

(iii) Beschreiben Sie die Menge $\text{AL} \setminus \bigcup_{\mathcal{B} \in B} \text{AL}_{\mathcal{B}}$ intensional ohne die Mengen $\text{AL}_{\mathcal{B}}$ zu benutzen.

Aufgabe 2: **(20 Punkte)**

Es sei $\varphi := (\neg V_2 \leftrightarrow (V_1 \vee \neg V_0))$

(a) Wandeln Sie φ mittels Wahrheitstabelle in eine äquivalente aussagenlogische Formel φ' in DNF um.

(b) Wenden Sie den Algorithmus 3.39 aus dem Skript an, um eine zu φ äquivalente aussagenlogische Formel φ'' in KNF zu berechnen.

Aufgabe 3: **(25 Punkte)**

Stellen Sie sich vor, Sie seien auf Zimmersuche in Frankfurt. Sie haben schon ein spezielles Zimmer ins Auge gefasst und rufen vier verschiedene Makler an, um etwas über dieses Zimmer zu erfahren. Sie hören folgende vier Äußerungen:

- Wenn es sich um eine 1-Zimmer-Wohnung handelt, dann stehen höchstens 26 m^2 Wohnraum zur Verfügung oder der Mietpreis ist höher als 400 €.
- Wenn sich das Zimmer nicht in einer 1-Zimmer-Wohnung befindet, dann ist das Zimmer in einer WG.
- Wenn mehr als 26 m^2 Wohnraum zur Verfügung stehen, dann liegt das Zimmer nicht in einer WG.
- Wenn mehr als 26 m^2 Wohnraum zur Verfügung stehen und der Mietpreis höher als 400 € ist, dann handelt es sich nicht um eine 1-Zimmer-Wohnung.

(a) Zerlegen Sie den obigen Text in atomare Aussagen und geben Sie eine aussagenlogische Formel φ an, die alle Äußerungen der Makler repräsentiert.

Betrachten Sie nun die nachfolgenden Aussagen:

- In der Wohnung stehen Ihrem Bekannten maximal 26 m^2 zur Verfügung.
- Wenn das Zimmer in einer WG liegt, dann beträgt der Mietpreis höchstens 400 €.
- Für das Zimmer gilt: Wenn der verlangte Mietpreis höchstens 400 € beträgt, dann handelt es sich um ein WG-Zimmer oder um eine 1-Zimmer-Wohnung.

(b) Geben Sie für jede der drei Aussagen eine aussagenlogische Formel an, die die Aussage repräsentiert.

(c) Entscheiden Sie für jede der drei aussagenlogischen Formeln aus (b), ob sie aus der Formel φ in (a) folgt.

Aufgabe 4: **(25 Punkte)**

Sei $n \in \mathbb{N}$, seien $A_0, \ldots, A_n, B_0, \ldots, B_n$ genau $2\cdot(n+1)$ verschiedene aussagenlogische Variablen, und sei

$$\varphi_n \;:=\; \bigwedge_{i=0}^{n} (A_i \leftrightarrow B_i).$$

(a) Beschreiben Sie die erfüllenden Belegungen $\mathcal{B}\colon \mathrm{Var}(\varphi_n) \to \{0,1\}$ für φ_n. Wie viele solcher Belegungen gibt es?

(b) Geben Sie eine zu φ_n äquivalente Formel in DNF an.

(c) Beweisen Sie Satz 3.44, d.h. beweisen Sie, dass jede zu φ_n äquivalente Formel in DNF mindestens 2^{n+1} konjunktive Klauseln hat.

Hinweis: Eine Möglichkeit, dies zu zeigen, ist einen Beweis durch Widerspruch zu führen. Nehmen Sie dazu an, dass ψ_n eine zu φ_n äquivalente Formel in DNF ist, die aus weniger als 2^{n+1} konjunktiven Klauseln besteht. D.h. es gibt eine natürliche Zahl $N < 2^{n+1}$ und N konjunktive Klauseln $\kappa_1, \ldots, \kappa_N$, so dass $\psi_n = \kappa_1 \vee \cdots \vee \kappa_N$. Folgern Sie aus Ihrer Antwort aus Teil (a), dass mindestens eine der Klauseln $\kappa_1, \ldots, \kappa_N$ von mindestens zwei verschiedenen die Formel φ_n erfüllenden Belegungen wahr gemacht wird. Leiten Sie daraus einen Widerspruch her.