Goethe-Universität Frankfurt am Main
Institut für Informatik
Theorie komplexer Systeme
Prof. Dr. Nicole Schweikardt

10. November 2010

Diskrete Modellierung

Wintersemester 20010/2011

Übungsblatt 3

Abgabe: *bis 17. November 2010, 8.15 Uhr (vor der Vorlesung oder in Raum RM 11-15/113)*

Aufgabe 1: **(25 Punkte)**

In den folgenden Teilaufgaben sollen einige Aspekte einer Variante des Spiels Monopoly mit Wertebereichen modelliert werden. Setzen Sie dabei nur die Menge $\mathbb{N}$ als vordefiniert voraus.

(a) Auf dem Spielbrett gibt es 40 Felder, wobei 22 von diesen Feldern Straßen und 18 Felder Plätze sind. Die Straßen und Plätze sind von 1 bis 22 bzw. von 1 bis 18 durchnummeriert.

Definieren Sie drei Mengen Strassen, Plätze und Felder, deren Elemente Straßen, Plätze bzw. Felder repräsentieren.

(b) Auf ein Feld vom Typ 'Straße' können beliebig viele Häuser und Hotels platziert werden, deren Anordnung aber keine Rolle spielt.

- **(i)** Definieren Sie eine Menge Bebauungszustände, von der jedes Element den Bebauungszustand einer einzelnen Straße (d.h. die Anzahl der Häuser und die Anzahl der Hotels) repräsentiert.
- **(ii)** Welches Element von Bebauungszustände beschreibt, dass sich drei Häuser und vier Hotels auf der Straße befinden?

(c) Der Zustand eines Spielers ist zu jedem Zeitpunkt bestimmt durch den Geldbetrag, der ihm zur Verfügung steht, der Menge der Straßen, die er besitzt, und dem Feld, auf dem er sich gerade befindet.

- **(i)** Definieren Sie eine Menge Spielerzustände, von der jedes Element den Zustand eines Spielers repräsentiert.
- **(ii)** Welches Element von Spielerzustände beschreibt, dass dem Spieler 1000 Euro zur Verfügung stehen, dass er die Straßen 4, 6 und 7 besitzt, und dass er gerade auf der 17. Straße steht?

(d) Ein Spieler, der eine Straße betritt, die bereits einem anderen Spieler gehört, muss Miete an den Besitzer der Straße entrichten. Die Höhe der Miete hängt von der Straße und deren Bebauungszustand ab.

Geben Sie Mengen A und B an, so dass der oben beschriebene Zusammenhang durch eine Funktion $\textit{miete}\colon A \to B$ modelliert werden kann, d.h. *miete* soll die Miete für die Straße in Abhängigkeit von der Straße selbst und deren Bebauungszustand angeben.

Aufgabe 2: **(15 Punkte)**

Beweisen Sie, dass für alle Mengen A, B, C mit $A = B \cup C$ gilt: Falls A unendlich ist, so ist B oder C unendlich.

Aufgabe 3: **(30 Punkte)**

Ein Algorithmus, der für eine Zahl $n \in \mathbb{N}_{>0}$ den Wert $\text{fib}(n)$ der Fibonacci-Folge berechnet, ist:

Algo 1 (bei Eingabe einer Zahl $n \in \mathbb{N}_{>0}$):
(1) Falls $n = 1$ oder $n = 2$, dann gib 1 als Ergebnis zurück.
(2) Falls $n \geq 3$, dann:
(3) Sei x_1 die Ausgabe von *Algo 1* bei Eingabe der Zahl $n - 1$.
(4) Sei x_2 die Ausgabe von *Algo 1* bei Eingabe der Zahl $n - 2$.
(5) Gib den Wert $(x_1 + x_2)$ als Ergebnis zurück.

Der Algorithmus benötigt bei Eingabe einer Zahl n höchstens $g_1(n)$ Schritte (dabei zählen wir der Einfachheit halber die Zeilen 1, 2 und 5 hier jeweils nur als einen Schritt), wobei

$$g_1(1) = 1, \quad g_1(2) = 1 \quad \text{und} \quad g_1(n) = 3 + g_1(n-1) + g_1(n-2) \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}_{>0} \text{ mit } n \geq 3$$

Ein anderer Algorithmus, der für eine Zahl $n \in \mathbb{N}_{>0}$ den Wert $\text{fib}(n)$ berechnet, ist:

Algo 2 (bei Eingabe einer Zahl $n \in \mathbb{N}_{>0}$):
(1) Falls $n = 1$ oder $n = 2$, dann gib 1 als Ergebnis zurück.
(2) Seien $a_0 := 0$, $a_1 := 1$ und $a_2 := 1$.
(3) Wiederhole für alle i von 3 bis n:
(4) Ersetze a_0 durch a_1 und a_1 durch a_2.
(5) Ersetze a_2 durch $a_0 + a_1$.
(6) Gib den Wert a_2 als Ergebnis zurück.

Dieser Algorithmus benötigt bei Eingabe $n \in \mathbb{N}_{>0}$ höchstens $g_2(n) := 2 \cdot (n-2) + 3$ Schritte (wie oben zählen wir die Zeilen 1, 2, 4, 5 und 6 jeweils als nur einen Schritt).

(a) Welcher der beiden Algorithmen läuft im Allgemeinen schneller? D.h. welche der beiden Funktionen g_1 und g_2 liefert kleinere Funktionswerte?

(b) Beweisen Sie, dass Ihre Antwort aus (a) korrekt ist. D.h. falls Sie in (a) geantwortet haben, dass *Algo i* im Allgemeinen schneller als *Algo j* ist, dann finden Sie eine Zahl $n_0 \in \mathbb{N}_{>0}$ und beweisen Sie per Induktion nach n, dass für alle $n \in \mathbb{N}_{>0}$ mit $n \geq n_0$ gilt: $g_i(n) < g_j(n)$.

Aufgabe 4: **(30 Punkte)**

(a) Zeigen Sie durch vollständige Induktion nach n, dass für alle $n \geq 1$ gilt:

(i) $2^n > n$

(ii) $\sum_{i=1}^{n} (2i - 1) = n^2$

(iii) $(1 + x)^n \geq (1 + nx) \quad$ für $x \in \mathbb{R}$ mit $x \geq -1$

(b) Gegeben sei folgende rekursiv definierte Funktion:

Für allle $n \in \mathbb{N}$ sei
$$g_s(n) := \begin{cases} s & , n = 0 \\ \frac{1}{2} \cdot g_s(n-1) & , \text{falls } g_s(n-1) \text{ gerade und } n \geq 1 \\ 3 \cdot g_s(n-1) + 1 & , \text{falls } g_s(n-1) \text{ ungerade und } n \geq 1 \end{cases}$$

Hierbei bezeichnet $s \in \mathbb{N}_{>0}$ den Startwert der Funktion. Berechnen Sie $g_5(5)$ und $g_{23}(15)$.[1]

---

[1]Bei dieser Funktion handelt es sich um die sogenannte Collatz-Funktion für den Startwert $s \in \mathbb{N}_{>0}$. Es ist kein Startwert s bekannt, für den g_s nicht irgendwann den Wert 1 erreicht, d.h. es ist unbekannt, ob für jedes $s \in \mathbb{N}_{>0}$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ existiert, so dass $g_s(n_0) = 1$.