Goethe-Universität Frankfurt am Main
Institut für Informatik
Theorie komplexer Systeme
Prof. Dr. Nicole Schweikardt

3. November 2010

Diskrete Modellierung

Wintersemester 2010/2011

Übungsblatt 2

Abgabe: *bis 10. November 2010, 8.^{15} Uhr (vor der Vorlesung oder in Raum RM 11-15/113)*

*Bitte achten Sie darauf, dass Sie auf der Abgabe Ihrer Lösung Ihren **Namen**, Ihre **Matrikelnummer** und Ihre **Übungsgruppe** angeben. Mehrseitige Abgaben müssen **zusammengeheftet** werden.*

Eine Aufgabe gilt nur dann als bearbeitet, wenn neben der Lösung auch die notwendigen Begründungen angegeben sind – es sei denn, in der Aufgabenstellung steht, dass eine solche Begründung nicht erforderlich ist.

Aufgabe 1: (25 Punkte)

In dieser Aufgabe betrachten wir das Spiel *Dinn*[1], das wie folgt definiert ist: Zwei Spieler, Alice und Bob, spielen gegeneinander. Zu Beginn des Spiels liegen neun Hölzer auf dem Tisch, zusätzlich besitzen Alice und Bob jeweils noch eine unbegrenzte Anzahl von Hölzern. Die beiden Spieler sind abwechselnd am Zug, Alice beginnt. In jedem Zug i kann der Spieler, der gerade an der Reihe ist, entweder i Hölzer zusätzlich auf den Tisch legen oder i Hölzer vom Tisch entfernen, wenn dort noch mindestens i Hölzer liegen. So kann Alice im ersten Zug ein Holz zu den Hölzern auf dem Tisch hinzufügen oder davon entfernen. Im zweiten Zug kann Bob entscheiden, ob er zwei Hölzer entfernt oder zwei hinzufügt und so fort. Es gewinnt der Spieler, der eine Anzahl von Hölzern auf dem Tisch hinterlässt, die eine Primzahl ist. (Achtung: 1 ist keine Primzahl.)

Modellieren Sie zur Beantwortung der folgenden Fragen das Spiel analog zum Beispiel 1.1 aus der Vorlesung durch ein Transitionssystem. Überlegen Sie sich zunächst, welche Zustände und Zustandsübergänge auftreten können.

(a) Ist es eine gute Idee für Alice, im ersten Zug ein Holz auf den Tisch zu legen?

(b) Eine Gewinnstrategie für einen Spieler in diesem Spiel ist eine Vorschrift, die ihm sagt, welchen Zug er als nächstes tätigen soll. Hält sich der Spieler an diese Vorschrift, so gewinnt er auf jeden Fall. Existiert in diesem Spiel eine Gewinnstrategie für Alice?

(c) Existiert eine Gewinnstrategie für Bob?

[1] rekursives Akronym für *Dinn ist nicht Nim*.

Aufgabe 2: **(32 Punkte)**

(a) Geben Sie alle Relationen von $A := \{p, q\}$ nach $B := \{r, s\}$ an. Geben Sie für jede Relation an, ob sie eine Funktion von A nach B oder eine partielle Funktion von A nach B oder keines von beiden ist. Geben Sie außerdem für jede Funktion an, ob sie injektiv, surjektiv und/oder bijektiv ist.

(b) Geben Sie für jede der folgenden Funktionen f an, ob die Funktion injektiv, surjektiv und/oder bijektiv ist. Geben Sie jeweils auch das Bild von f an.

- **(i)** $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$ mit $f(x) := \lfloor x \rfloor$ für alle $x \in \mathbb{R}$
  (dabei gilt für $x \in \mathbb{R}$ und $z \in \mathbb{Z}$: $\lfloor x \rfloor = z :\Longleftrightarrow z \leq x < z + 1$)
- **(ii)** $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ mit $f(x) := \begin{cases} 2x & \text{für } x \in \mathbb{Z},\ x \geq 0 \\ 2|x| - 1 & \text{für } x \in \mathbb{Z},\ x < 0 \end{cases}$
  (dabei gilt für $x \in \mathbb{R}: |x| := x$, falls $x \geq 0$ und $|x| := -x$, falls $x < 0$)
- **(iii)** $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ mit $f(x) := |x| \cdot (-1)^{|x|}$ für alle $x \in \mathbb{N}$
- **(iv)** $f\colon A^* \to \mathbb{N}$ für eine beliebige Menge A mit $|A| = 1$ und $f(w) := |w|$ für alle $w \in A^*$
- **(v)** $f\colon A^* \to \mathbb{N}$ für eine beliebige Menge A mit $|A| = 2$ und $f(w) := |w|$ für alle $w \in A^*$

(c) Wie viele Möglichkeiten gibt es,

- **(i)** zwei Bälle B_1, B_2 so auf drei Körbe K_1, K_2, K_3 zu verteilen, dass jeder Ball in einem anderen Korb landet? D.h. wie viele injektive Funktionen von $\{B_1, B_2\}$ nach $\{K_1, K_2, K_3\}$ gibt es?
- **(ii)** drei Bälle B_1, B_2, B_3 so auf zwei Körbe K_1, K_2 zu verteilen, dass kein Korb leer bleibt? D.h. wie viele surjektive Funktionen von $\{B_1, B_2, B_3\}$ nach $\{K_1, K_2\}$ gibt es?

Aufgabe 3: **(19 Punkte)**

Beweisen Sie Satz 2.38(b), d.h.: Sei B eine Menge, sei A eine endliche Menge und sei $k := |A|$. Zeigen Sie, dass es eine bijektive Funktion von $\mathrm{Abb}(A, B)$ nach B^k gibt.

Aufgabe 4: **(24 Punkte)**

Seien X und Y endliche Mengen und $f \subseteq X \times Y$ eine Relation von X nach Y. Wir definieren die Relation $\widetilde{f}$ als Relation von Y nach X wie folgt:

$$\text{Für alle } x \in X,\ y \in Y \text{ gilt:} \quad (y, x) \in \widetilde{f} :\Longleftrightarrow (x, y) \in f,$$

(a) Beweisen Sie, dass die folgende Aussage korrekt ist: f ist genau dann eine bijektive Funktion, wenn $\widetilde{f}$ eine bijektive Funktion ist.[2]

(b) Die Kardinalität einer endlichen, nicht-leeren Menge lässt sich alternativ zur Definition in der Vorlesung auch folgendermaßen definieren: Für eine endliche, nicht-leere Menge A und $n \in \mathbb{N}$ gilt $|A| = n$ genau dann, wenn es eine bijektive Funktion von A nach $\{1, 2, ..., n\}$ gibt. Benutzen Sie diese Definition (und nicht Beobachtung 2.37(b)), um folgende Aussage zu beweisen:

Gilt für zwei endliche, nicht-leere Mengen X und Y, dass $|X| = |Y|$, so gibt es eine bijektive Funktion von X nach Y.

Hinweis: Sie können die Aussage aus Teilaufgabe (a) auch dann nutzen, wenn Sie diese nicht selbst bewiesen haben.

[2] In diesem Falle wird $\widetilde{f}$ die *Umkehrfunktion* von f genannt und üblicherweise mit f^{-1} bezeichnet