Kapitel 7: Der Vollständigkeitssatz

Ziel dieses Kapitels ist, ein "formales Beweissystem" (den sogenannten Sequenzenkalkül) kennenzulernen, mit dem man alle allgemeingültigen FO-Formeln herleiten kann. — Insbesondere folgt daraus dann, dass das ~~auf Seite 201 definierte~~ Problem

Allgemeingültigkeit semi-entscheidbar ist.

Eingabe: Eine FO[σ]-Formel φ
Frage: Gilt für alle zu φ passende σ-Interpretationen $\mathcal{I}$, dass $\mathcal{I} \models \varphi$?

7.1 Beweiskalküle

Definition 7.1 (Ableitungsregel; Kalkül)

Sei M eine beliebige Menge.

(a) Eine Ableitungsregel über M hat die Form

$$\frac{\begin{matrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{matrix}}{b}$$

wobei $n \in \mathbb{N}$ und $a_1, \ldots, a_n, b \in M$.

Wir bezeichnen $a_1, \ldots, a_n$ als die Voraussetzungen der Regel $\dfrac{\begin{matrix}a_1\\ \vdots\\ a_n\end{matrix}}{b}$ und b als die Konsequenz.

Ableitungsregeln ohne Voraussetzungen (also mit $n=0$) bezeichnen wir als Axiome.

(b) Ein Kalkül über M ist eine Menge von Ableitungsregeln über M

Definition 7.2 (Ableitbare Elemente)

Sei $\mathcal{K}$ ein Kalkül über einer Menge M.

(a) Die Menge $A_{\mathcal{K}} \subseteq M$ aller in $\mathcal{K}$ ableitbaren Elemente ist rekursiv wie folgt definiert:

(1) Für alle Axiome $\overline{\;b\;}$ in $\mathcal{K}$ ist $b \in A_{\mathcal{K}}$

(2) Für alle Ableitungsregeln $\dfrac{\begin{matrix}a_1\\ \vdots\\ a_n\end{matrix}}{b}$ in $\mathcal{K}$ gilt: Wenn $a_1, \ldots, a_n \in A_{\mathcal{K}}$, so auch $b \in A_{\mathcal{K}}$.

($A_{\mathcal{K}}$ ist also die bezüglich "$\subseteq$" kleinste Menge, die die Abschlusseigenschaften (1) und (2) besitzt.)

(b) Sei $V \subseteq M$ eine beliebige Teilmenge von M.
Die Menge $A_{\mathfrak{K},V} \subseteq M$ aller
aus V in $\mathfrak{K}$ ableitbaren Elemente ist rekursiv
wie folgt definiert:

(0) F.a. $b \in V$ ist $b \in A_{\mathfrak{K},V}$

(1) F.a. Axiome $\frac{}{b}$ in $\mathfrak{K}$ ist $b \in A_{\mathfrak{K},V}$

(2) F.a. Ableitungsregeln $\frac{\substack{a_1 \\ \vdots \\ a_n}}{b}$ in $\mathfrak{K}$ gilt:
Wenn $a_1, \dots, a_n \in A_{\mathfrak{K},V}$, so auch $b \in A_{\mathfrak{K},V}$.

(V heißt Menge von Voraussetzungen).

Beachte: Kalküle sind also einfach eine andere Schreibweise für rekursive Definitionen.

Definition 7.3 (Ableitungen)
Sei $\mathfrak{K}$ ein Kalkül über einer Menge M, sei $V \subseteq M$ und sei $a \in M$.

(a) Eine Ableitung von a aus V in $\mathfrak{K}$ ist eine endliche Folge $(a_1, \dots, a_\ell) \in M^\ell$, so dass

$\ell \in \mathbb{N}_{\geq 1}$, $a_\ell = a$ und für alle $i \in \{1, \dots, \ell\}$ gilt:

- $a_i \in V$ oder
- $\overline{a_i}$ ist ein Axiom in $\mathfrak{K}$ oder
- es gibt in $\mathfrak{K}$ eine Ableitungsregel $\dfrac{\begin{matrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{matrix}}{a_i}$, so dass $b_1, \dots, b_m \in \{a_1, \dots, a_{i-1}\}$.

(b) Eine Ableitung von a in $\mathfrak{K}$ ist eine Ableitung von a aus $\emptyset$ in $\mathfrak{K}$.

Beobachtung 7.4: Offensichtlich gilt:

a ist aus V in $\mathfrak{K}$ ableitbar (gemäß Def. 7.2) $\iff$ es gibt eine Ableitung von a aus V in $\mathfrak{K}$ (gemäß Def. 7.3).

7.2 Ein Sequenzenkalkül

In diesem Kapitel sei σ eine beliebige, fest gewählte Signatur (im Sinne von Def. 1.1).

Notation 7.5

- $t, u, t_1, t_2, t', u', u'', \dots$ bezeichnen immer σ-Terme
- $\varphi, \psi, \chi, \dots$ bezeichnen immer $FO[\sigma]$-Formeln
- $\Phi, \Psi, \Phi_1, \Phi_2, \Psi', \dots$ bezeichnen Mengen von $FO[\sigma]$-Formeln
- $\Gamma, \Delta, \Gamma', \Delta_1, \Delta_2, \dots$ bezeichnen <u>endliche</u> Mengen von $FO[\sigma]$-Formeln
- Für $\Phi \subseteq FO[\sigma]$ ist

$$\text{frei}(\Phi) := \bigcup_{\varphi \in \Phi} \text{frei}(\varphi)$$

Manchmal schreiben wir auch $\text{frei}(\Phi, \varphi)$ an Stelle von $\text{frei}(\Phi \cup \{\varphi\})$

- Ist M eine Menge, so schreiben wir $L \subseteq_e M$, um auszudrücken, dass L eine <u>endliche</u> Teilmenge von M ist.

Definition 7.6 (Sequenzen)

(a) Eine *Sequenz* ist ein Ausdruck der Form

$$\Gamma \vdash \psi$$

wobei $\Gamma \subseteq_e \mathrm{FO}[\sigma]$ und $\psi \in \mathrm{FO}[\sigma]$.

Wir bezeichnen Γ als das *Antezedenz* und ψ als das *Sukzedenz* der Sequenz $\Gamma \vdash \psi$.

(b) Wir schreiben M_S, um die Menge aller Sequenzen zu bezeichnen, d.h.:

$$M_S := \{ \Gamma \vdash \psi \ : \ \Gamma \subseteq_e \mathrm{FO}[\sigma] \text{ und } \psi \in \mathrm{FO}[\sigma] \}$$

Notation 7.7:

- Statt $\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \psi$ schreiben wir auch $\Gamma, \varphi \vdash \psi$.
- Statt $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\} \vdash \psi$ schreiben wir auch $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \vdash \psi$
- Statt $\emptyset \vdash \psi$ schreiben wir auch $\vdash \psi$.

In Definition 2.1 hatten wir bereits festgelegt, wann eine FO(σ)-Formel ψ aus einer Formel φ folgt:

$\varphi \models \psi \underset{\text{Def 2.1}}{:\Longleftrightarrow}$ f.a. zu φ und ψ passenden σ-Interpretationen $\mathcal{I}$ gilt: Falls $\mathcal{I} \models \varphi$, so auch $\mathcal{I} \models \psi$.

Die folgende Definition legt (auf die naheliegende Weise) fest, wann eine Formel ψ aus einer ganzen Menge Φ von Formeln folgt:

Definition 7.8:

Sei $\Phi \subseteq$ FO[σ] und sei $\psi \in$ FO[σ].

ψ folgt aus Φ (bzw. Φ impliziert ψ), kurz: $\Phi \models \psi$, wenn für alle σ-Interpretationen $\mathcal{I}$, die zu ψ und zu allen $\varphi \in \Phi$ passen, gilt: falls f.a. $\varphi \in \Phi$ gilt: $\mathcal{I} \models \varphi$, so gilt auch: $\mathcal{I} \models \psi$.

Notation 7.9

Sei $\Phi \subseteq FO[\sigma]$ und sei $\mathcal{I}$ eine σ-Interpretation.

- Wir sagen: $\mathcal{I}$ passt zu Φ, falls $\mathcal{I}$ zu jedem $\varphi \in \Phi$ passt.
- $\mathcal{I} \models \Phi$ (in Worten: $\mathcal{I}$ erfüllt Φ) $:\iff$ f.a. $\varphi \in \Phi$ gilt: $\mathcal{I} \models \varphi$.

Definition 7.10 (korrekte Sequenzen)

Eine Sequenz $\Gamma \vdash \psi$ heißt korrekt, wenn gilt: $\Gamma \models \psi$.

Die folgende Definition führt einen Kalkül über der Menge M_S aller Sequenzen fest, den so genannten Sequenzenkalkül $\mathcal{S}$. Im Verlauf von Kapitel 7 werden wir sehen, dass folgendes gilt:

(I) Alle in $\mathcal{S}$ ableitbaren Sequenzen sind korrekt.

(II) Ist $\Phi \subseteq FO[\sigma]$ und ist $\psi \in FO[\sigma]$ so dass $\Phi \models \psi$, dann gibt es ein $\Gamma \subseteq_e \Phi$, so dass die Sequenz $\Gamma \vdash \psi$ in $\mathcal{S}$ ableitbar ist.

Definition 7.11 (Sequenzenkalkül $\mathfrak{S}$)

Der Sequenzenkalkül $\mathfrak{S}$ ist der Kalkül über der Menge M_S aller Sequenzen, der aus den folgenden Ableitungsregeln besteht
(f.a. $\Gamma, \Gamma' \subseteq_e \mathrm{FO}[\sigma]$, $\varphi, \psi, \chi \in \mathrm{FO}[\sigma]$,
$t, u \in T_\sigma$, $x, y \in \mathrm{Var}$):

- Voraussetzungsregel (V):

$$\frac{}{\Gamma, \varphi \vdash \varphi}$$

- Erweiterungsregel (E):

$$\frac{\Gamma \vdash \varphi}{\Gamma' \vdash \varphi} \quad \text{falls } \Gamma \subseteq \Gamma'$$

"Grundregeln"

- Fallunterscheidungsregel (FU)

$$\frac{\begin{array}{c}\Gamma, \psi \vdash \varphi \\ \Gamma, \neg\psi \vdash \varphi\end{array}}{\Gamma \vdash \varphi}$$

- Widerspruchsregel (W)

$$\frac{\begin{array}{c}\Gamma \vdash \psi \\ \Gamma \vdash \neg\psi\end{array}}{\Gamma \vdash \varphi} \quad (\text{f.a. } \varphi \in \mathrm{FO}[\sigma])$$

"Aussagenlogische Regeln"

- $\wedge$-Einführung im Antezedenz $(\wedge A_1)$, $(\wedge A_2)$:

$$\frac{\Gamma, \varphi \vdash \chi}{\Gamma, (\varphi \wedge \psi) \vdash \chi} \qquad \frac{\Gamma, \varphi \vdash \chi}{\Gamma, (\psi \wedge \varphi) \vdash \chi}$$

- $\wedge$-Einführung im Sukzedenz $(\wedge S)$:

$$\frac{\begin{array}{c}\Gamma \vdash \varphi \\ \Gamma \vdash \psi\end{array}}{\Gamma \vdash (\varphi \wedge \psi)}$$

- $\vee$-Einführung im Antezedenz $(\vee A)$:

$$\frac{\begin{array}{c}\Gamma, \varphi \vdash \chi \\ \Gamma, \psi \vdash \chi\end{array}}{\Gamma, (\varphi \vee \psi) \vdash \chi}$$

- $\vee$-Einführung im Sukzedenz $(\vee S_1)$, $(\vee S_2)$:

$$\frac{\Gamma \vdash \varphi}{\Gamma \vdash (\varphi \vee \psi)} \qquad \frac{\Gamma \vdash \varphi}{\Gamma \vdash (\psi \vee \varphi)}$$

„weitere Aussagen-logische Regeln"

— auf der nächsten Seite geht's weiter —

- $\forall$-Einführung im Antezedent ($\forall$A):

$$\frac{\Gamma, \varphi\frac{t}{x} \vdash \psi}{\Gamma, \forall x\varphi \vdash \psi}$$

- $\forall$-Einführung im Sukzedent ($\forall$S):

$$\frac{\Gamma \vdash \varphi\frac{y}{x}}{\Gamma \vdash \forall x\varphi}, \text{ falls } y \notin \text{frei}(\Gamma, \forall x\varphi)$$

- $\exists$-Einführung im Antezedent ($\exists$A)

$$\frac{\Gamma, \varphi\frac{y}{x} \vdash \psi}{\Gamma, \exists x\varphi \vdash \psi}, \text{ falls } y \notin \text{frei}(\Gamma, \exists x\varphi, \psi)$$

- $\exists$-Einführung im Sukzedent ($\exists$S)

$$\frac{\Gamma \vdash \varphi\frac{t}{x}}{\Gamma \vdash \exists x\varphi}$$

"Quantorenregeln"

- Reflexivität der Gleichheit (G):

$$\frac{}{\Gamma \vdash t = t}$$

- Substitutionsregel (S):

$$\frac{\Gamma \vdash \varphi\frac{t}{x}}{\Gamma, t = u \vdash \varphi\frac{u}{x}}$$

"Gleichheitsregeln"

Im Folgenden geben wir einige Beispiele für Ableitungen im Sequenzenkalkül:

Beispiel 7.12

(a) F.a. $\varphi \in Fo[\sigma]$ ist $\vdash (\varphi \vee \neg\varphi)$ ableitbar in $\mathfrak{S}$:

1) $\varphi \vdash \varphi$ — (V)
2) $\varphi \vdash (\varphi \vee \neg\varphi)$ — ($\vee S_1$) auf 1) angewendet
3) $\neg\varphi \vdash \neg\varphi$ — (V)
4) $\neg\varphi \vdash (\varphi \vee \neg\varphi)$ — ($\vee S_2$) auf 3) angewendet
5) $\vdash (\varphi \vee \neg\varphi)$ — (FU) auf 2),4) angewendet

(b) F.a. $\varphi \in Fo[\sigma]$ ist $\exists x \forall y \varphi \vdash \forall y \exists x \varphi$ ableitbar in $\mathfrak{S}$.

1) $\varphi \vdash \varphi$ — (V)
2) $\varphi \vdash \exists x \varphi$ — ($\exists S$) auf 1) mit $t = x$
3) $\forall y \varphi \vdash \exists x \varphi$ — ($\forall A$) auf 2) mit $t = y$
? 4) $\forall y \varphi \vdash \forall y \exists x \varphi$ — ($\forall S$) auf 3) mit $x = y$
5) $\exists x \forall y \varphi \vdash \forall y \exists x \varphi$ — ($\exists A$) auf 4) mit $y = x$

(b) $R(f(x)),\ \forall x\ x = f(x) \ \vdash\ R(f(f(x)))$

ist ableitbar in $\mathfrak{S}$:

1) $R(f(x)) \ \vdash\ R(f(x))$ (V)

2) $R(f(x)),\ x = f(x) \ \vdash\ R(f(f(x)))$

(S) mit $t = x$, $u = f(x)$

3) $R(f(x)),\ \forall x\ x = f(x) \ \vdash\ R(f(f(x)))$ ($\forall$A).

Der folgende Satz bestätigt Punkt (I) der auf Seite 209 beschriebenen Agenda:

<u>Satz 7.13</u> (Korrektheit des Sequenzenkalküls)

Jede in $\mathfrak{S}$ ableitbare Sequenz ist korrekt, d.h. f.a. Sequenzen $\Gamma \vdash \varphi$, die in $\mathfrak{S}$ ableitbar sind, gilt: $\Gamma \models \varphi$.

<u>Beweis:</u> Wir zeigen für alle Regeln von $\mathfrak{S}$: Wenn die Voraussetzungen korrekt sind, dann ist auch die Konsequenz korrekt.

<u>Beachte:</u> Satz 7.13 folgt dann per Induktion.

- (V): $\overline{\Gamma, \varphi \vdash \varphi}$

Offensichtlich gilt: $\Gamma \cup \{\varphi\} \models \varphi$.
Daher ist die Sequenz $\Gamma, \varphi \vdash \varphi$ korrekt.

- (G): $\overline{\Gamma \vdash t = t}$

Offensichtlich ist die Formel $t = t$ allgemeingültig.
Daher gilt f.a. Γ, dass $\Gamma \models t = t$.
Somit ist die Sequenz $\Gamma \vdash t = t$ korrekt.

- (E): $\dfrac{\Gamma \vdash \varphi}{\Gamma' \vdash \varphi}$ falls $\Gamma \subseteq \Gamma'$

Annahme: $\Gamma \vdash \varphi$ ist korrekt, d.h. $\Gamma \models \varphi$.
Sei $\Gamma \subseteq \Gamma'$. Zu zeigen: $\Gamma' \models \varphi$.
Beweis: Sei $\mathcal{I}$ eine zu Γ' und φ passende σ-Interpretation mit $\mathcal{I} \models \Gamma'$. Wegen $\Gamma \subseteq \Gamma'$ gilt dann auch: $\mathcal{I} \models \Gamma$. Wegen $\Gamma \models \varphi$ folgt, dass $\mathcal{I} \models \varphi$.
Somit gilt: $\Gamma' \models \varphi$, d.h. $\Gamma' \vdash \varphi$ ist korrekt.

• (FU):

$$\frac{\Gamma, \psi \vdash \varphi \qquad \Gamma, \neg\psi \vdash \varphi}{\Gamma \vdash \varphi}$$

Annahme: $\Gamma, \psi \vdash \varphi$ ist korrekt und $\Gamma, \neg\psi \vdash \varphi$ ist korrekt.

Zu zeigen: $\Gamma \vdash \varphi$ ist korrekt.

Beweis: Laut Annahme gilt $\Gamma \cup \{\psi\} \models \varphi$ und $\Gamma \cup \{\neg\psi\} \models \varphi$.

Sei $\mathcal{I}$ eine zu $\Gamma \cup \{\psi\} \cup \{\varphi\}$ passende σ-Interpretation mit $\mathcal{I} \models \Gamma$.

Fall 1: $\mathcal{I} \models \psi$. Dann: $\mathcal{I} \models \Gamma \cup \{\psi\}$.
Wegen $\Gamma \cup \{\psi\} \models \varphi$ gilt daher: $\mathcal{I} \models \varphi$.

Fall 2: $\mathcal{I} \models \neg\psi$. Dann: $\mathcal{I} \models \Gamma \cup \{\neg\psi\}$.
Wegen $\Gamma \cup \{\neg\psi\} \models \varphi$ gilt daher: $\mathcal{I} \models \varphi$.

Somit gilt: $\Gamma \models \varphi$, d.h. die Sequenz $\Gamma \vdash \varphi$ ist korrekt

• (W):

$$\frac{\Gamma \vdash \psi \qquad \Gamma \vdash \neg\psi}{\Gamma \vdash \varphi} \qquad (\text{f.a. } \varphi \in FO[\sigma])$$

Annahme: $\Gamma \vdash \psi$ ist korrekt und $\Gamma \vdash \neg\psi$ ist korrekt

Zu zeigen: f.a. $\varphi \in FO[\sigma]$ ist $\Gamma \vdash \varphi$ korrekt

<u>Beweis:</u> Wir zeigen, dass es keine σ-Interpretation $\mathcal{I}$ geben kann, die Γ erfüllt. Daraus folgt dann unmittelbar, dass $\Gamma \models \varphi$, d.h. dass die Sequenz $\Gamma \vdash \varphi$ korrekt ist.

Angenommen, $\mathcal{I} = (\mathfrak{A}, \beta)$ ist eine zu Γ passende σ-Interpretation mit $\mathcal{I} \models \Gamma$.
Offensichtlicherweise kann der Definitionsbereich von β so erweitert werden, dass $\mathcal{I}$ auch zur Formel ψ passt.
Laut Annahme gilt: $\Gamma \vdash \psi$ und $\Gamma \vdash \neg\psi$ sind korrekt, d.h. es gilt: $\Gamma \models \psi$ und $\Gamma \models \neg\psi$.
Wegen $\mathcal{I} \models \Gamma$ muss daher sowohl $\mathcal{I} \models \psi$ als auch $\mathcal{I} \models \neg\psi$ gelten $\lightning$ Wid.

- <u>$(\wedge A_1)$</u>: $$\frac{\Gamma, \varphi \vdash \chi}{\Gamma, (\varphi \wedge \psi) \vdash \chi}$$

<u>Annahme:</u> $\Gamma, \varphi \vdash \chi$ ist korrekt.
<u>Zu zeigen:</u> $\Gamma, (\varphi \wedge \psi) \vdash \chi$ ist korrekt

<u>Beweis:</u> offensichtlich.

- <u>$(\wedge A_2)$</u>: analog.

- $(\underline{\wedge S})$, $(\underline{\vee A})$, $(\underline{\vee S_1})$, $(\underline{\vee S_2})$, $(\underline{\forall A})$, $(\underline{\exists S})$, $(\underline{S})$ analog (einfach!)

- $\underline{(\forall S)}$: $\dfrac{\Gamma \vdash \varphi\frac{y}{x}}{\Gamma \vdash \forall x \varphi}$, falls $y \notin \text{frei}(\Gamma, \forall x \varphi)$

<u>Annahme</u>: $\Gamma \vdash \varphi\frac{y}{x}$ ist korrekt, d.h. $\Gamma \models \varphi\frac{y}{x}$

Sei $y \notin \text{frei}(\Gamma, \forall x \varphi)$. <u>Zu zeigen</u>: $\Gamma \vdash \forall x \varphi$ ist korrekt.

Sei $\mathcal{I} = (\mathfrak{A}, \beta)$ eine σ-Interpretation mit $\mathcal{I} \models \Gamma$.

Wegen $y \notin \text{frei}(\Gamma)$ gilt laut Koinzidenzlemma, dass f.a. $a \in A$ gilt: $\mathcal{I}\frac{a}{y} \models \Gamma$.

Gemäß Annahme gilt: $\Gamma \models \varphi\frac{y}{x}$, d.h. es gilt f.a. $a \in A$, dass $\mathcal{I}\frac{a}{y} \models \varphi\frac{y}{x}$

Somit gilt: $\mathcal{I} \models \forall y\, \varphi\frac{y}{x}$

Wegen $y \notin \text{frei}(\forall x \varphi) = \text{frei}(\varphi) \setminus \{x\}$ gilt gemäß Definition 2.6 („Substitution"), dass $\mathcal{I} \models \forall x \varphi$.

Somit gilt: $\Gamma \models \forall x \varphi$, d.h. die Sequenz $\Gamma \vdash \forall x \varphi$ ist korrekt.

- $(\underline{\exists A})$: $\dfrac{\Gamma,\ \varphi\frac{y}{x} \vdash \psi}{\Gamma,\ \exists x\varphi \vdash \psi}$ falls $y \notin \text{frei}(\Gamma, \exists x\varphi, \psi)$

analog; Details: Übung.

Dies schließt den Beweis von Satz 7.13 ab. $\square$

Wir betrachten den Sequenzenkalkül $\mathfrak{S}$ als "formales Beweissystem", mit dem man mechanisch den Nachweis erbringen kann, dass für eine Formelmenge Φ und eine Formel φ gilt: $\Phi \models \varphi$. Dies wird in der folgenden Definition präzisiert:

<u>Definition 7.14</u> (Beweisbarkeit)

Sei $\Phi \subseteq FO[\sigma]$ und sei $\varphi \in FO[\sigma]$.

Die Formel φ ist <u>beweisbar</u> aus Φ, wenn es eine endliche Teilmenge Γ von Φ gibt, so dass die Sequenz $\Gamma \vdash \varphi$ in $\mathfrak{S}$ ableitbar ist.

Ein <u>Beweis</u> von φ aus Φ ist eine Ableitung einer Sequenz $\Gamma \vdash \varphi$ in $\mathfrak{S}$ für ein $\Gamma \subseteq_e \Phi$.

Notation 7.15

- Wir schreiben $\Phi \vdash_{\mathfrak{S}} \varphi$, um auszudrücken, dass φ aus Φ beweisbar ist.
- An Stelle von $\emptyset \vdash_{\mathfrak{S}} \varphi$ schreiben wir auch $\vdash_{\mathfrak{S}} \varphi$.

Aus Satz 7.13 (Korrektheit von $\mathfrak{S}$) folgt direkt:

Korollar 7.16

Für alle $\Phi \subseteq FO[\sigma]$ und alle $\varphi \in FO[\sigma]$ gilt:

$$\Phi \vdash_{\mathfrak{S}} \varphi \implies \Phi \models \varphi$$

(d.h.: falls φ aus Φ beweisbar ist, so <u>folgt</u> φ aus Φ).

Unser Ziel im Rest von Kapitel 7 ist, zu zeigen, dass auch die Umkehrung von Korollar 7.14 gilt, d.h.: F.a. $\Phi \subseteq FO[\sigma]$ und alle $\varphi \in FO[\sigma]$ gilt

$$\Phi \vdash_{\mathfrak{S}} \varphi \iff \Phi \models \varphi.$$

Dies ist gerade die Aussage des Vollständigkeitssatzes. Man beachte, dass die Richtung "$\Leftarrow$" gerade Punkt (II) der auf Seite 209 beschriebenen Agenda darstellt.

7.3 Ableitbare Regeln im Sequenzenkalkül

<u>Definition 7.17</u>: Sei $k \in \mathbb{N}$, $\Gamma_1, \dots, \Gamma_{k+1} \subseteq_e FO[\sigma]$, $\varphi_1, \dots, \varphi_{k+1} \in FO[\sigma]$.

Eine Sequenzenregel

$$\frac{\begin{array}{c} \Gamma_1 \vdash \varphi_1 \\ \vdots \\ \Gamma_k \vdash \varphi_k \end{array}}{\Gamma_{k+1} \vdash \varphi_{k+1}}$$

heißt <u>ableitbar (in $\mathfrak{S}$)</u>, wenn $\Gamma_{k+1} \vdash \varphi_{k+1}$ aus der Menge $V := \{ \Gamma_i \vdash \varphi_i : i \in \{1, \dots, k\} \}$ in $\mathfrak{S}$ ableitbar ist.

<u>Lemma 7.18</u>

Sei $\mathfrak{S}'$ eine Erweiterung des Sequenzenkalküls $\mathfrak{S}$ um eine oder mehrere ableitbare Sequenzenregeln.

Dann ist eine Sequenz S genau dann in $\mathfrak{S}'$ ableitbar, wenn sie auch in $\mathfrak{S}$ ableitbar ist.

<u>Beweis:</u> Dies folgt unmittelbar aus Aufgabe 3 von Übungsblatt 8. $\square$

Im Folgenden wird eine Liste von ableitbaren Sequenzenregeln zusammengestellt, die für den Beweis des Vollständigkeitssatzes sehr nützlich sein werden.

<u>Lemma 7.19</u> (Ableitbare aussagenlogische Sequenzenregeln)
Folgende Sequenzenregeln sind ableitbar (f.a. $\Gamma \subseteq_e FO[\sigma]$ und $\varphi, \psi \in FO[\sigma]$):

- Kettenschlussregel (KS):

$$\frac{\begin{array}{c}\Gamma \vdash \varphi \\ \Gamma, \varphi \vdash \psi\end{array}}{\Gamma \vdash \psi}$$

- Disjunktiver Syllogismus (DS):

$$\frac{\begin{array}{c}\Gamma \vdash \neg\varphi \\ \Gamma \vdash (\varphi \vee \psi)\end{array}}{\Gamma \vdash \psi}$$

- Modus Ponens (MP):

$$\frac{\begin{array}{c}\Gamma \vdash \varphi \\ \Gamma \vdash (\varphi \to \psi)\end{array}}{\Gamma \vdash \psi}$$

- Kontrapositionsregeln (KP):

- $$\frac{\Gamma, \varphi \vdash \psi}{\Gamma, \neg\psi \vdash \neg\varphi}$$

- $$\frac{\Gamma, \varphi \vdash \neg\psi}{\Gamma, \psi \vdash \neg\varphi}$$

- $$\frac{\Gamma, \neg\varphi \vdash \psi}{\Gamma, \neg\psi \vdash \varphi}$$

- $$\frac{\Gamma, \neg\varphi \vdash \neg\psi}{\Gamma, \psi \vdash \varphi}$$

Beweis:

- (KS):

1) $\Gamma \vdash \varphi$ (Voraussetzung)
2) $\Gamma, \varphi \vdash \psi$ (Voraussetzung)
3) $\Gamma, \neg\psi \vdash \varphi$ (E) auf 1)
4) $\Gamma, \neg\psi \vdash \neg\psi$ (V)
5) $\Gamma, \neg\psi \vdash \psi$ (W) auf 3), 4)
6) $\Gamma \vdash \psi$ (FU) auf 2), 5)

- (DS):

1) $\Gamma \vdash (\varphi \vee \psi)$ (Voraussetzung)
2) $\Gamma \vdash \neg\varphi$ (Voraussetzung)
3) $\Gamma, \varphi \vdash \neg\varphi$ (E) auf 2)
4) $\Gamma, \varphi \vdash \varphi$ (V)
5) $\Gamma, \varphi \vdash \psi$ (W) auf 3), 4)
6) $\Gamma, \psi \vdash \psi$ (V)
7) $\Gamma, (\varphi \vee \psi) \vdash \psi$ (vA) auf 5), 6)
8) $\Gamma \vdash \psi$ (KS) auf 1), 7)

- (MP):

1) $\Gamma \vdash (\neg\varphi \vee \psi)$ (Voraussetzung; wir betrachten hier und im Folgende die Formel $(\varphi \to \psi)$ als Abkürzung für $(\neg\varphi \vee \psi)$)
2) $\Gamma \vdash \varphi$ (Voraussetzung)
3) $\Gamma, \neg\varphi \vdash \varphi$ (E) auf 2)
4) $\Gamma, \neg\varphi \vdash \neg\varphi$ (V)
5) $\Gamma, \neg\varphi \vdash \psi$ (W) auf 3), 4)
6) $\Gamma, \psi \vdash \psi$ (V)
7) $\Gamma, (\neg\varphi \vee \psi) \vdash \psi$ (vA) auf 5), 6)
8) $\Gamma \vdash \psi$ (KS) auf 1), 7)

- (KP):

1) $\Gamma, \varphi \vdash \psi$ (Voraussetzung)
2) $\Gamma, \neg\psi, \varphi \vdash \psi$ (E) auf 1)
3) $\Gamma, \neg\psi \vdash \neg\psi$ (V)
4) $\Gamma, \neg\psi, \varphi \vdash \neg\psi$ (E) auf 3)
5) $\Gamma, \neg\psi, \varphi \vdash \neg\varphi$ (W) auf 2), 4)
6) $\Gamma, \neg\psi, \neg\varphi \vdash \neg\varphi$ (V)
7) $\Gamma, \neg\psi \vdash \neg\varphi$ (FU) auf 5), 6)

Die anderen Kontrapositionsregeln können analog abgeleitet werden. □

<u>Lemma 7.20</u> (Ableitbare Quantorenregeln)

Folgende Sequenzenregeln sind ableitbar: (f.a. $\Gamma \subseteq_e \mathrm{FO}[\sigma]$, alle $\varphi \in \mathrm{FO}[\sigma]$ und alle $x \in \mathrm{Var}$)

Quantorenaustauschregeln (QA):

1) $$\frac{\Gamma \vdash \neg\forall x\, \varphi}{\Gamma \vdash \exists x\, \neg\varphi}$$

2) $$\frac{\Gamma \vdash \exists x\, \neg\varphi}{\Gamma \vdash \neg\forall x\, \varphi}$$

3) $$\frac{\Gamma \vdash \neg\exists x\, \varphi}{\Gamma \vdash \forall x\, \neg\varphi}$$

4) $$\frac{\Gamma \vdash \forall x\, \neg\varphi}{\Gamma \vdash \neg\exists x\, \varphi}$$

Beweis:

zu 1):

1) $\Gamma \vdash \neg\forall x\, \varphi$ (Voraussetzung)

2) $\Gamma, \neg\varphi\frac{y}{x} \vdash \neg\varphi\frac{y}{x}$ (V); sei $y \notin \mathrm{frei}(\Gamma, \forall x \varphi)$

3) $\Gamma, \neg\varphi\frac{y}{x} \vdash \exists x \neg\varphi$ ($\exists$S) auf 2) mit $t = y$

4) $\Gamma, \neg\exists x \neg\varphi \vdash \varphi\frac{y}{x}$ (KP) auf 3)

5) $\Gamma, \neg\exists x \neg\varphi \vdash \forall x\, \varphi$ ($\forall$S) auf 4)

6) $\Gamma, \neg\forall x\, \varphi \vdash \exists x \neg\varphi$ (KP) auf 5)

7) $\Gamma \vdash \exists x \neg\varphi$ (KS) auf 1), 6)

zu 2):

1) $\Gamma \vdash \exists x \neg\varphi$ (Voraussetzung)

2) $\Gamma, \varphi\frac{y}{x} \vdash \varphi\frac{y}{x}$ (V); sei $y \notin \mathrm{frei}(\Gamma, \forall x \varphi)$

3) $\Gamma, \forall x\, \varphi \vdash \varphi\frac{y}{x}$ ($\forall$A)

4) $\Gamma, \neg\varphi\frac{y}{x} \vdash \neg\forall x\, \varphi$ (KP) auf 3)

5) $\Gamma, \exists x \neg\varphi \vdash \neg\forall x\, \varphi$ ($\exists$A) auf 4)

6) $\Gamma \vdash \neg\forall x\, \varphi$ (KS) auf 1), 5)

zu 3) und 4): analog.

$\square$

Lemma 7.21 (Ableitbare Gleichheitsregeln)

Folgende Sequenzenregeln sind ableitbar
(f.a. $\Gamma \subseteq_e FO[\sigma]$, f.a. $t, u, t_1, u_1, t_2, u_2, \ldots \in T_\sigma$):

- Symmetrie der Gleichheit (SG):

$$\frac{\Gamma \vdash t = u}{\Gamma \vdash u = t}$$

- Transitivität der Gleichheit (TG):

$$\frac{\begin{array}{l}\Gamma \vdash t_1 = t_2 \\ \Gamma \vdash t_2 = t_3\end{array}}{\Gamma \vdash t_1 = t_3}$$

- Verträglichkeitsregeln für die Gleichheit:

(VR): f.a. Relationssymbole $R \in \sigma$ und für $r := ar(R)$

$$\frac{\begin{array}{l}\Gamma \vdash R(t_1, \ldots, t_r) \\ \Gamma \vdash t_1 = u_1 \\ \vdots \\ \Gamma \vdash t_r = u_r\end{array}}{\Gamma \vdash R(u_1, \ldots, u_r)}$$

(VF): f.a. Funktionssymbole $f \in \sigma$ und für $r := ar(f)$:

$$\frac{\begin{array}{l}\Gamma \vdash t_1 = u_1 \\ \vdots \\ \Gamma \vdash t_r = u_r\end{array}}{\Gamma \vdash f(t_1, \ldots, t_r) = f(u_1, \ldots, u_r)}$$

Beweis:

- (SG):

1) $\Gamma \vdash t = u$ (Voraussetzung)
2) $\Gamma \vdash t = t$ (G)
3) $\Gamma, t = u \vdash u = t$ (S) auf 2) mit $\varphi := x = t$
4) $\Gamma \vdash u = t$ (KS) auf 1), 3)

- (TG):

1) $\Gamma \vdash t_1 = t_2$ (Voraussetzung)
2) $\Gamma \vdash t_2 = t_3$ (Voraussetzung)
3) $\Gamma, t_2 = t_3 \vdash t_1 = t_3$ (S) auf 1) mit $\varphi := t_1 = x,\ t := t_2,\ u := t_3$
4) $\Gamma \vdash t_1 = t_3$ (KS) auf 2), 3)

- (VR): Beweis für $r = 2$ (für andere r: analog)

1) $\Gamma \vdash R(t_1, t_2)$ (Voraussetzung)
2) $\Gamma \vdash t_1 = u_1$ (Voraussetzung)
3) $\Gamma \vdash t_2 = u_2$ (Voraussetzung)
4) $\Gamma, t_1 = u_1 \vdash R(u_1, t_2)$ (S) auf 1)
5) $\Gamma \vdash R(u_1, t_2)$ (KS) auf 2), 4)
6) $\Gamma, t_2 = u_2 \vdash R(u_1, u_2)$ (S) auf 5)
7) $\Gamma \vdash R(u_1, u_2)$ (KS) auf 3), 6)

- (VF): Beweis für $r=2$ (für andere r: analog)

1) $\Gamma \vdash t_1 = u_1$ (Voraussetzung)
2) $\Gamma \vdash t_2 = u_2$ (Voraussetzung)
3) $\Gamma \vdash f(t_1, t_2) = f(t_1, t_2)$ (G)
4) $\Gamma, t_1 = u_1 \vdash f(t_1, t_2) = f(u_1, t_2)$
   (S) auf 3) mit
   $\varphi := f(t_1, t_2) = f(x, t_2)$
5) $\Gamma \vdash f(t_1, t_2) = f(u_1, t_2)$ (KS) auf 1), 4)
6) $\Gamma, t_2 = u_2 \vdash f(t_1, t_2) = f(u_1, u_2)$
   (S) auf 5) mit
   $\varphi := f(t_1, t_2) = f(u_1, x)$
7) $\Gamma \vdash f(t_1, t_2) = f(u_1, u_2)$ (KS) auf 2), 6)

Dies schließt den Beweis von Lemma 7.21 ab.

$\square$

7.4 Widerspruchsfreiheit und das syntaktische Endlichkeitslemma

Definition 7.22 (Widerspruchsfreiheit)

Sei $\Phi \subseteq FO[\sigma]$.

(a) Φ heißt <u>widerspruchsvoll</u>, falls es ein $\varphi \in FO[\sigma]$ gibt, so dass $\Phi \vdash_{\mathfrak{S}} \varphi$ und $\Phi \vdash_{\mathfrak{S}} \neg\varphi$.

(d.h.: Φ ist widerspruchsvoll, falls sich im Sequenzenkalkül $\mathfrak{S}$ ein Widerspruch herleiten lässt).

(b) Φ heißt <u>widerspruchsfrei</u>, falls Φ nicht widerspruchsvoll ist.

Definition 7.23 (Erfüllbarkeit)

Eine Formelmenge $\Phi \subseteq FO[\sigma]$ heißt <u>erfüllbar</u>, falls es eine zu Φ passende σ-Interpretation $\mathcal{I}$ mit $\mathcal{I} \models \Phi$ gibt.

Aus Korollar 7.16 folgt direkt, dass erfüllbare Formelmengen widerspruchsfrei sind:

Korollar 7.24

Für alle $\Phi \subseteq FO[\sigma]$ gilt:

$$\Phi \text{ erfüllbar} \implies \Phi \text{ widerspruchsfrei}$$

Beweis:

Sei Φ erfüllbar, und sei $\mathcal{I} = (\mathcal{A}, \beta)$ eine zu Φ passende σ-Interpretation mit $\mathcal{I} \models \Phi$.

Angenommen, Φ wäre widerspruchsvoll.

Dann gibt es gemäß Definition 7.22 ein $\varphi \in FO[\sigma]$ so dass $\Phi \vdash_{\mathfrak{S}} \varphi$ und $\Phi \vdash_{\mathfrak{S}} \neg\varphi$.

Aus Korollar 7.16 folgt, dass $\Phi \models \varphi$ und $\Phi \models \neg\varphi$.

Natürlich können wir den Definitionsbereich von $\mathcal{I}$ so erweitern, dass $\mathcal{I}$ zu φ passt.

Wegen $\mathcal{I} \models \Phi$ und $\Phi \models \varphi$ und $\Phi \models \neg\varphi$ gilt dann: $\mathcal{I} \models \varphi$ und $\mathcal{I} \models \neg\varphi$ $\lightning$ Widerspruch.

$\square$

Eine Variante des Vollständigkeitssatzes besagt, dass auch die Umkehrung von Korollar 7.24 gilt, d.h. es gilt:

Φ ist erfüllbar $\iff$ Φ ist widerspruchsfrei.

Im Rest von Kapitel 7 werden wir den Vollständigkeitssatz ($\Phi \models \varphi \iff \Phi \vdash_{\mathfrak{S}} \varphi$) dadurch beweisen, dass wir

1) zeigen, dass jede widerspruchsfreie Formelmenge Φ tatsächlich erfüllbar ist
(dies ist die Aussage des so genannten <u>Erfüllbarkeitslemmas</u>, siehe Abschnitt 7.5)

und

2) zeigen, dass aus dem Erfüllbarkeitslemma folgt, dass für alle $\Phi \subseteq FO[\sigma]$ und alle $\varphi \in FO[\sigma]$ gilt: Falls $\Phi \models \varphi$, so $\Phi \vdash_{\mathfrak{S}} \varphi$.

Um 1) und 2) zu erreichen, werden wir die im Folgenden zusammengestellten Eigenschaften widerspruchsfreier bzw. widerspruchsvoller Formelmengen benutzen.

Lemma 7.25

Für alle $\Phi \subseteq FO[\sigma]$ gilt:

(a) Φ ist widerspruchs<u>frei</u> $\iff$ es gibt ein $\varphi \in FO[\sigma]$ so dass $\underbrace{\Phi \nvdash_{\mathfrak{S}} \varphi}$

(Notation für "es gilt nicht, dass $\Phi \vdash_{\mathfrak{S}} \varphi$")

(b) Φ ist widerspruchs<u>voll</u> $\iff$ für alle $\varphi \in FO[\sigma]$ gilt: $\Phi \vdash_{\mathfrak{S}} \varphi$.

(c) Φ ist widerspruchs<u>voll</u> $\iff$ $\Phi \vdash_{\mathfrak{S}} \exists v_0\, \neg v_0 = v_0$

<u>Beweis</u>:

<u>(a)</u>: <u>"$\Rightarrow$"</u>: Sei Φ widerspruchsfrei.

Sei φ eine beliebige $FO[\sigma]$-Formel.

Da Φ widerspruchs<u>frei</u> ist, gilt gemäß Definition 7.22, dass $\Phi \nvdash_{\mathfrak{S}} \varphi$ oder $\Phi \nvdash_{\mathfrak{S}} \neg\varphi$.

<u>"$\Leftarrow$"</u>: Sei $\varphi \in FO[\sigma]$ so dass $\Phi \nvdash_{\mathfrak{S}} \varphi$.

Angenommen, Φ wäre widerspruchsvoll.
Dann gibt es ein $\psi \in FO[\sigma]$, so dass
$\Phi \vdash_{\mathfrak{S}} \psi$ und $\Phi \vdash_{\mathfrak{S}} \neg\psi$.

Gemäß Definition 7.14 gibt es dann
$\Gamma_1 \subseteq_e \Phi$ und $\Gamma_2 \subseteq_e \Phi$ so dass die Sequenzen
$\Gamma_1 \vdash \psi$ und $\Gamma_2 \vdash \neg\psi$ in $\mathfrak{S}$ ableitbar sind.
Dann ist auch folgendes in $\mathfrak{S}$ ableitbar:

1) $\Gamma_1 \vdash \psi$
2) $\Gamma_2 \vdash \neg\psi$
3) $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \vdash \psi$ (E) auf 1)
4) $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \vdash \neg\psi$ (E) auf 2)
5) $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \vdash \varphi$ (W) auf 3), 4)

Somit gilt: $\Phi \vdash_{\mathfrak{S}} \varphi$. $\lightning$

$\square$ Beweis von (a)

<u>(b)</u>: folgt direkt aus <u>(a)</u>

<u>(c)</u>: <u>"$\Longrightarrow$"</u>:
folgt direkt aus <u>(b)</u>

"$\Leftarrow$": Es gelte $\Phi \vdash_{\mathfrak{S}} \exists v_0 \neg v_0 = v_0$.

D.h. es gibt ein $\Gamma \subseteq_e \Phi$ so dass die Sequenz $\Gamma \vdash \exists v_0 \neg v_0 = v_0$ in $\mathfrak{S}$ ableitbar ist.

Sei $\varphi \in FO[\sigma]$ beliebig.
Wir zeigen im Folgenden, dass auch die Sequenz $\Gamma \vdash \varphi$ ableitbar ist
(— daraus folgt, dass für jedes $\varphi \in FO[\sigma]$ gilt: $\Phi \vdash_{\mathfrak{S}} \varphi$; gemäß (6) ist Φ daher widerspruchsvoll).

Wir wissen bereits, dass $\Gamma \vdash \exists v_0 \neg v_0 = v_0$ in $\mathfrak{S}$ ableitbar ist. Eine Ableitung von $\Gamma \vdash \varphi$ in $\mathfrak{S}$ erhalten wir wie folgt:

1) $\Gamma \vdash \exists v_0 \neg v_0 = v_0$ .... (laut Voraussetzung)
2) $\Gamma \vdash \neg \forall v_0\, v_0 = v_0$ .... (QA), siehe Lemma 7.20
3) $\emptyset \vdash v_0 = v_0$ .... (G)
4) $\emptyset \vdash \forall v_0\, v_0 = v_0$ .... ($\forall$S) auf 3)
5) $\Gamma \vdash \forall v_0\, v_0 = v_0$ .... (E) auf 4)
6) $\Gamma \vdash \varphi$ .... (W) auf 6), 2)

$\square$

Lemma 7.26

Für alle $\Phi \subseteq FO[\sigma]$ und alle $\varphi \in FO[\sigma]$ gilt:

(a) $\Phi \vdash_{\mathfrak{S}} \varphi \iff \Phi \cup \{\neg\varphi\}$ ist widerspruchsvoll

(b) $\Phi \vdash_{\mathfrak{S}} \neg\varphi \iff \Phi \cup \{\varphi\}$ ist widerspruchsvoll

(c) Φ widerspruchsfrei $\implies$ mindestens eine der beiden Mengen $\Phi \cup \{\varphi\}$ und $\Phi \cup \{\neg\varphi\}$ ist widerspruchsfrei.

Beweis:

(a) "$\Longrightarrow$": Sei $\Phi \vdash_{\mathfrak{S}} \varphi$.

Man sieht leicht, dass dann auch gilt $\Phi \cup \{\neg\varphi\} \vdash_{\mathfrak{S}} \varphi$.

Außerdem gilt natürlich, dass $\Phi \cup \{\neg\varphi\} \vdash_{\mathfrak{S}} \neg\varphi$ (Regel (V) im Sequenzenkalkül $\mathfrak{S}$).

Somit ist $\Phi \cup \{\neg\varphi\}$ widerspruchsvoll.

"$\Longleftarrow$": Sei $\Phi \cup \{\neg\varphi\}$ widerspruchsvoll.

Wegen Lemma 7.25 (b) gilt dann: $\Phi \cup \{\neg\varphi\} \vdash_{\mathfrak{S}} \varphi$.

D.h. es gibt ein $\Gamma \subseteq_e \Phi$ so dass die Sequenz $\Gamma, \neg\varphi \vdash \varphi$ in $\mathfrak{S}$ ableitbar ist.

Eine Ableitung von $\Gamma \vdash \varphi$ in $\mathfrak{S}$ erhalten wir dann wie folgt:

1) $\Gamma, \neg\varphi \vdash \varphi$
2) $\Gamma, \varphi \vdash \varphi$ (V)
3) $\Gamma \vdash \varphi$ (FU) auf 1), 2).

Somit gilt: $\Phi \vdash_{\mathfrak{S}} \varphi$.

□ (a)

(b): analog zu (a).

(c): Sei Φ widerspruchsfrei.
Angenommen, sowohl $\Phi \cup \{\varphi\}$ als auch $\Phi \cup \{\neg\varphi\}$ ist widerspruchsvoll.
Aus (a) und (b) folgt dann, dass
$\Phi \vdash_{\mathfrak{S}} \varphi$ und $\Phi \vdash_{\mathfrak{S}} \neg\varphi$.
Somit ist Φ nicht widerspruchsfrei. ↯ Wid.

□

Dies beendet die Auflistung der Eigenschaften von widerspruchsfreien bzw. widerspruchsvollen Formelmengen.

Das folgende — sehr einfache — Lemma wird später, beim Beweis des Vollständigkeitssatzes (und auch in Kapitel 8 beim Beweis des so genannten Endlichkeitssatzes) sehr nützlich sein.

<u>Lemma 7.27</u> (Das syntaktische Endlichkeitslemma)

Für jedes $\Phi \subseteq FO[\sigma]$ gilt:

Φ ist widerspruchsfrei $\iff$ jede <u>endliche</u> Teilmenge $\Gamma \subseteq_e \Phi$ ist widerspruchsfrei

<u>Beweis:</u>

"$\Longrightarrow$": Angenommen, $\Gamma \subseteq_e \Phi$ ist widerspruchsvoll.

Lemma 7.25(c) liefert dann, dass $\Gamma \vdash_{\mathfrak{S}} \exists v_0\, \neg v_0 = v_0$.

Wegen $\Phi \supseteq \Gamma$ folgt, dass $\Phi \vdash_{\mathfrak{S}} \exists v_0\, \neg v_0 = v_0$.

Lemma 7.25(c) liefert, dass Φ widerspruchsvoll ist $\lightning$

"$\Longleftarrow$": Angenommen, Φ wäre widerspruchsvoll.

Lemma 7.25(c) $\Rightarrow$ $\Phi \vdash_{\mathfrak{S}} \exists v_0\, \neg v_0 = v_0$. Gemäß Definition 7.14 gibt es daher ein $\Gamma \subseteq_e \Phi$ so dass $\Gamma \vdash_{\mathfrak{S}} \exists v_0\, \neg v_0 = v_0$.

Lemma 7.25(c) $\Rightarrow$ Γ ist widerspruchsvoll. $\lightning$ $\square$

7.5 Der Vollständigkeitssatz

Satz 7.28 (Der Vollständigkeitssatz; in 2 Varianten)

Für alle $\Phi \subseteq FO[\sigma]$ und alle $\varphi \in FO[\sigma]$ gilt:

(a) $$\Phi \vdash_{\mathfrak{S}} \varphi \iff \Phi \models \varphi$$

(b) Φ ist widerspruchsfrei $\iff$ Φ ist erfüllbar.

Wir beweisen den Vollständigkeitssatz hier nur für abzählbare Signaturen σ — er gilt aber für alle Signaturen σ (für einen Beweis siehe [EFT]).

Das folgende Lemma liefert den Schlüssel für den Beweis des Vollständigkeitssatzes.

Lemma 7.29 (Erfüllbarkeitslemma)

Für jedes $\Phi \subseteq FO[\sigma]$ gilt:

$$\Phi \text{ widerspruchsfrei} \implies \Phi \text{ erfüllbar.}$$

Bevor wir Lemma 7.29 beweisen, zeigen wir zunächst, wie es genutzt werden kann, um den Vollständigkeitssatz zu beweisen.

Beweis von Satz 7.28:

(b): "$\Longrightarrow$": Dies ist gerade die Aussage des Erfüllbarkeitslemmas (Lemma 7.29)

"$\Longleftarrow$": Korollar 7.24

(a): "$\Longrightarrow$": Korollar 7.16

"$\Longleftarrow$" Es gelte $\Phi \models \varphi$.

Angenommen, $\Phi \not\vdash_{\mathfrak{S}} \varphi$.

Aus Lemma 7.26(a) folgt dann, dass $\Phi \cup \{\neg\varphi\}$ widerspruchsfrei ist

Aus Teil (b) von Satz 7.28 folgt, dass $\Phi \cup \{\neg\varphi\}$ erfüllbar ist.

D.h. es gibt eine σ-Interpretation $\mathcal{I}$ mit $\mathcal{I} \models \Phi \cup \{\neg\varphi\}$. D.h. es gilt: $\mathcal{I} \models \Phi$ und $\mathcal{I} \models \neg\varphi$.

Laut Voraussetzung gilt aber: $\Phi \models \varphi$, und daher gilt: $\mathcal{I} \models \varphi$ $\lightning$ Widerspruch. $\square$

Der Rest von Kapitel 7 ist dem Beweis des Erfüllbarkeitslemmas (Lemma 7.29) gewidmet.

Dazu sei σ eine abzählbare Signatur, und Φ sei im Folgenden eine fest gewählte widerspruchsfreie Formelmenge $\Phi \subseteq FO[\sigma]$.

Ziel: Konstruiere eine zu Φ passende σ-Interpretation $\mathcal{I}$ mit $\mathcal{I} \models \Phi$.

Im Folgenden werden wir nach und nach eine solche σ-Interpretation $\mathcal{I}$ konstruieren.

Definition 7.30 (Terminterpretationen)

(a) Die σ-Struktur $\mathfrak{A}_\Phi$ ist folgendermaßen definiert:

- $A_\Phi := T_\sigma$

  (d.h. das Universum von $\mathfrak{A}_\Phi$ besteht aus der Menge aller σ-Terme)

- f.a. Konstantensymbole $c \in \sigma$ ist $c^{\mathfrak{A}_\Phi} := c$

- f.a. Funktionssymbole $f \in \sigma$, für $k := ar(f)$ und f.a. $t_1, \dots, t_k \in A_\Phi$ ist

  $$f^{\mathfrak{A}_\Phi}(t_1, \dots, t_k) := f(t_1, \dots, t_k)$$

- f.a. Relationssymbole $R \in \sigma$ und für $k := ar(R)$ ist

  $$R^{\mathfrak{A}_\Phi} := \{ (t_1, \dots, t_k) \in (A_\Phi)^k : \Phi \vdash_{\mathfrak{S}} R(t_1, \dots, t_k) \}$$

(b) Die Belegung $\beta_\Phi : Var \to A_\Phi$ sei definiert durch $\beta(x) := x$, f.a. $x \in Var$.

(c) Die Struktur $\mathfrak{A}_\Phi$ heißt <u>Termstruktur</u> von Φ.
$\mathcal{I} := (\mathfrak{A}_\Phi, \beta_\Phi)$ heißt <u>Terminterpretation</u> von Φ.

Beobachtung 7.31

F.a. $R \in \sigma$, für $k := ar(R)$ und f.a. $t_1, \dots, t_k \in T_\sigma$ gilt:
$$\mathcal{I}_\Phi \models R(t_1, \dots, t_k) \iff \Phi \vdash_{\mathfrak{S}} R(t_1, \dots, t_k)$$

Beweis: $\mathcal{I}_\Phi \models R(t_1, \dots, t_k)$
$$\iff \left([\![t_1]\!]^{\mathcal{I}_\Phi}, \dots, [\![t_k]\!]^{\mathcal{I}_\Phi} \right) \in R^{\mathcal{A}_\Phi}$$
$$\iff (t_1, \dots, t_k) \in R^{\mathcal{A}_\Phi}$$
$$\iff \Phi \vdash_{\mathfrak{S}} R(t_1, \dots, t_k)$$

Beobachtung 7.32

F.a. $t_1, t_2 \in T_\sigma$ mit $t_1 \neq t_2$ gilt:
$$\mathcal{I}_\Phi \not\models t_1 = t_2$$

Somit gilt:
Falls es Terme t_1 und t_2 mit $t_1 \neq t_2$ gibt, so dass $\Phi \vdash_{\mathfrak{S}} t_1 = t_2$, so gilt: $\mathcal{I}_\Phi \not\models \Phi$.

Ziel: Modifiziere $\mathcal{I}_\Phi$ so zu einer σ-Interpretation $[\mathcal{I}_\Phi]$, dass f.a. $\varphi \in FO[\sigma]$ gilt: $[\mathcal{I}_\Phi] \models \varphi \iff \Phi \vdash_{\mathfrak{S}} \varphi$.

Definition 7.33 (Kongruenzrelation $\sim$ auf T_σ)

Die zweistellige Relation $\sim$ auf T_σ sei folgendermaßen definiert:

f.a. $t, u \in T_\sigma$ gilt: $t \sim u \;:\Longleftrightarrow\; \Phi \vdash_{\mathfrak{S}} t = u$.

Lemma 7.34

(a) Die Relation $\sim$ ist eine Äquivalenzrelation auf T_σ

(b) F.a. Relationssymbole $R \in \sigma$, für $k := ar(R)$ und f.a. σ-Terme $t_1, \dots, t_k, u_1, \dots, u_k \in T_\sigma$ mit $t_1 \sim u_1, t_2 \sim u_2, \dots, t_k \sim u_k$ gilt:

$$\Phi \vdash_{\mathfrak{S}} R(t_1, \dots, t_k) \iff \Phi \vdash_{\mathfrak{S}} R(u_1, \dots, u_k)$$

(c) F.a. Funktionssymbole $f \in \sigma$, für $k := ar(f)$ und f.a. σ-Terme $t_1, \dots, t_k, u_1, \dots, u_k \in T_\sigma$ mit $t_1 \sim u_1, t_2 \sim u_2, \dots, t_k \sim u_k$ gilt:

$$f(t_1, \dots, t_k) \sim f(u_1, \dots, u_k).$$

Beweis: (a): Folgt mit (G), (SG), (TG).
(b): Folgt mit (VR).
(c): Folgt mit (VF).

$\square$

Als unmittelbare Folgerung aus Lemma 7.34 erhalten wir:

Korollar 7.35:

Die Relation $\sim$ ist eine Kongruenzrelation auf $\mathfrak{A}_\Phi$, d.h. es gilt:

(1): $\sim$ ist eine Äquivalenzrelation auf A_Φ,

(2): f.a. $R \in \sigma$, für $k := ar(R)$ und f.a. $a_1, \ldots, a_k, b_1, \ldots, b_k \in A_\Phi$ mit $a_1 \sim b_1, \ldots, a_k \sim b_k$ gilt:

$$\mathfrak{A}_\Phi \models R(a_1 \ldots a_k) \iff \mathfrak{A}_\Phi \models R(b_1 \ldots b_k)$$

und

(3): f.a. $f \in \sigma$, für $k := ar(f)$ und f.a. $a_1, \ldots, a_k, b_1, \ldots, b_k \in A_\Phi$ mit $a_1 \sim b_1, \ldots, a_k \sim b_k$ gilt

$$f^{\mathfrak{A}_\Phi}(a_1, \ldots, a_k) \sim f^{\mathfrak{A}_\Phi}(b_1, \ldots, b_k).$$

Wir betrachten nun die σ-Struktur, die man aus $\mathfrak{M}_\Phi$ erhält, indem man alle bezüglich $\sim$ äquivalenten Elemente in A_Φ miteinander identifiziert.

<u>Definition 7.36</u> (Die reduzierte Terminterpretation $[\mathfrak{I}_\Phi]$)

<u>(a)</u> Für jedes $a \in A_\Phi$ sei

$$[a] := \{ b \in A_\Phi : b \sim a \}$$

die <u>Äquivalenzklasse</u> von a bezüglich $\sim$ in A_Φ.

<u>(b)</u> Die σ-Struktur $[\mathfrak{M}_\Phi]$ sei folgendermaßen definiert:

<u>(i)</u> Das Universum von $[\mathfrak{M}_\Phi]$ ist die Menge

$$[A_\Phi] := \{ [a] : a \in A_\Phi \}$$

(d.h. $[A_\Phi]$ besteht aus allen Äquivalenzklassen von Elementen in A_Φ)

<u>(ii)</u> F.a. $c \in \sigma$ ist $c^{[\mathfrak{M}_\Phi]} := [c]$

(iii) F.a. $R \in \sigma$ und für $k := ar(R)$ ist

$$R^{[\mathfrak{A}_\Phi]} := \left\{ ([a_1], \dots, [a_k]) : (a_1, \dots, a_k) \in R^{\mathfrak{A}_\Phi} \right\}$$

(iv) F.a. $f \in \sigma$, für $k := ar(f)$ und f.a. $a_1, \dots, a_k \in A_\Phi$ ist

$$f^{[\mathfrak{A}_\Phi]}([a_1], \dots, [a_k]) := \left[f^{\mathfrak{A}_\Phi}(a_1, \dots, a_k) \right]$$

Beachte: Dies ist wohldefiniert, da gemäß Korollar 7.35 (3) f.a. $a_1, \dots, a_k, b_1, \dots, b_k \in A_\Phi$ mit $[a_1] = [b_1], \dots, [a_k] = [b_k]$ gilt:

$$\left[f^{\mathfrak{A}_\Phi}(a_1, \dots, a_k) \right] = \left[f^{\mathfrak{A}_\Phi}(b_1, \dots, b_k) \right].$$

(c) Die Belegung $[\beta_\Phi] : Var \to [A_\Phi]$ ist f.a. $x \in Var$ definiert durch $[\beta_\Phi](x) := [x]$.

(d) Die Struktur $[\mathfrak{A}_\Phi]$ heißt reduzierte Termstruktur von Φ.

$[\mathcal{I}_\Phi] := ([\mathfrak{A}_\Phi], [\beta_\Phi])$ heißt reduzierte Terminterpretation von Φ.

Lemma 7.37

(a) F.a. $t \in T_\sigma$ gilt: $[\![t]\!]^{[\mathcal{I}_\Phi]} = [t]$.

(b) Für alle atomaren $FO[\sigma]$-Formeln φ gilt:

$$[\mathcal{I}_\Phi] \models \varphi \iff \Phi \vdash_{\mathfrak{S}} \varphi.$$

Beweis: einfaches Nachrechnen. Details: Übung. $\square$

Eigentlich würden wir gern zeigen, dass Teil (b) von Lemma 7.37 nicht nur für atomare Formeln, sondern für alle Formeln $\varphi \in FO[\sigma]$ gilt (... dann wären wir auch mit dem Beweis des Erfüllbarkeitslemmas fertig, da f.a. $\varphi \in \Phi$ natürlich $\Phi \vdash_{\mathfrak{S}} \varphi$ gilt).

Leider lässt sich Teil (b) von Lemma 7.37 (b) nur dann auf alle $FO[\sigma]$-Formeln verallgemeinern, wenn die Menge Φ die folgenden Eigenschaften hat:

Definition 7.38

(a) Φ heißt <u>negationstreu</u>, wenn f.a. $\varphi \in FO[\sigma]$ gilt:

$$\Phi \vdash_{\mathfrak{S}} \varphi \quad \text{oder} \quad \Phi \vdash_{\mathfrak{S}} \neg\varphi .$$

(b) Φ <u>enthält Beispiele</u>, wenn für alle $FO[\sigma]$-Formeln der Form $\exists x \varphi$ gilt:
Es gibt einen Term $t \in T_\sigma$, so dass

$$\Phi \vdash_{\mathfrak{S}} \left(\exists x \varphi \rightarrow \varphi \frac{t}{x} \right).$$

Lemma 7.39

Sei Φ widerspruchsfrei und negationstreu.
Dann gilt für alle $\varphi, \psi \in FO[\sigma]$:

(a) $\quad \Phi \vdash_{\mathfrak{S}} \neg\varphi \iff \Phi \nvdash_{\mathfrak{S}} \varphi$.

(b) $\quad \Phi \vdash_{\mathfrak{S}} (\varphi \vee \psi) \iff \Phi \vdash_{\mathfrak{S}} \varphi$ oder $\Phi \vdash_{\mathfrak{S}} \psi$

<u>Beweis:</u> (a): "$\Rightarrow$": Gilt, da Φ widerspruchsfrei ist
"$\Leftarrow$": Gilt, da Φ negationstreu ist.

(b): "$\Leftarrow$": Folgt unmittelbar aus der Sequenzenregel $(\vee S)$.

"$\Rightarrow$": Es gelte $\Phi \vdash_{\mathfrak{G}} (\varphi \vee \psi)$

Falls $\Phi \nvdash_{\mathfrak{G}} \varphi$, so gilt gemäß (a), dass $\Phi \vdash_{\mathfrak{G}} \neg\varphi$.

Aus $\Phi \vdash_{\mathfrak{G}} \neg\varphi$ und $\Phi \vdash_{\mathfrak{G}} (\varphi \vee \psi)$ folgt mit der Regel (DS) ("Disjunktiver Syllogismus", siehe Lemma 7.19), dass

$\Phi \vdash_{\mathfrak{G}} \psi$. $\Box$

Der folgende Satz bedeutet, dass das Erfüllbarkeitslemma für alle widerspruchsfreien Formelmengen Φ gilt, die <u>negationstreu</u> sind und <u>Beispiele enthalten</u>.

<u>Satz 7.40</u> (Der Satz von **Henkin**)

Sei $\Phi \subseteq FO[\sigma]$ eine Formelmenge, die widerspruchsfrei und negationstreu ist und die Beispiele enthält.

Dann gilt für jedes $\varphi \in FO[\sigma]$:

$$[\mathcal{I}_\Phi] \models \varphi \iff \Phi \vdash_{\mathfrak{G}} \varphi.$$

(<u>Beachte</u>: Daraus folgt insbes., dass $[\mathcal{I}_\Phi] \models \Phi$).

Beweis: Per Induktion über den Aufbau von $FO[\sigma]$.

- φ atomar: Lemma 7.37 (b).

- $\varphi = \neg\varphi_1$: $[\mathcal{I}_\Phi] \models \neg\varphi_1$

$\iff [\mathcal{I}_\Phi] \not\models \varphi_1$

$\iff$ (Ind.annahme) $\Phi \nvdash_S \varphi_1$

$\iff$ (Lemma 7.39 (a)) $\Phi \vdash_S \neg\varphi_1$ ✓

- $\varphi = (\varphi_1 \vee \varphi_2)$: $[\mathcal{I}_\Phi] \models (\varphi_1 \vee \varphi_2)$

$\iff [\mathcal{I}_\Phi] \models \varphi_1$ oder $[\mathcal{I}_\Phi] \models \varphi_2$

$\iff$ (Ind.annahme) $\Phi \vdash_S \varphi_1$ oder $\Phi \vdash_S \varphi_2$

$\iff$ (Lemma 7.39(b)) $\Phi \vdash_S (\varphi_1 \vee \varphi_2)$ ✓

- $\varphi = (\varphi_1 \wedge \varphi_2)$:

Übung!

Zur Erinnerung:

In diesem Kapitel fassen wir die Junktoren "$\rightarrow$" und "$\leftrightarrow$" als Abkürzungen für die entsprechenden Kombinationen aus $\wedge, \vee, \neg$ auf. Daher betrachten wir "$\rightarrow$", "$\leftrightarrow$" in diesem Beweis nicht.

- $\varphi = \exists x \varphi_1$:

"$\Rightarrow$": Es gelte $[\mathfrak{I}_\Phi] \models \exists x \varphi_1$.

$\Rightarrow$ es gibt ein $t \in T_\sigma$ s.d. $[\mathfrak{I}_\Phi] \frac{[t]}{x} \models \varphi_1$

$\underset{\text{Substitutionslemma; beachte: } [t] = [\![t]\!]^{\mathfrak{I}_\Phi}}{\Rightarrow}$ es gibt ein $t \in T_\sigma$ s.d. $[\mathfrak{I}_\Phi] \models \varphi_1 \frac{t}{x}$

$\underset{\text{Ind.annahme}}{\Rightarrow}$ es gibt ein $t \in T_\sigma$ s.d. $\Phi \vdash_{\mathfrak{S}} \varphi_1 \frac{t}{x}$

$\underset{\substack{\text{Sequenzenregel} \\ (\exists S)}}{\Rightarrow}$ $\Phi \vdash_{\mathfrak{S}} \exists x \varphi_1$. ✓

"$\Leftarrow$": Es gelte $\Phi \vdash_{\mathfrak{S}} \exists x \varphi_1$.

Nach Voraussetzung enthält Φ Beispiele, d.h. es gibt ein $t \in T_\sigma$ s.d. $\Phi \vdash_{\mathfrak{S}} (\exists x \varphi_1 \to \varphi_1 \frac{t}{x})$.

Somit gilt: $\Phi \vdash_{\mathfrak{S}} \exists x \varphi_1$
und $\Phi \vdash_{\mathfrak{S}} (\exists x \varphi_1 \to \varphi_1 \frac{t}{x})$.

Die ableitbare Sequenzenregel (MP) ("Modus Ponens", siehe Lemma 7.19) liefert, dass $\Phi \vdash_{\mathfrak{S}} \varphi_1 \frac{t}{x}$.

Gemäß Ind.annahme folgt, dass $[\mathfrak{I}_\Phi] \models \varphi_1 \frac{t}{x}$.

Substitutionslemma und $[\![t]\!]^{\mathfrak{I}_\Phi} = [t]$ liefern, dass $[\mathfrak{I}_\Phi] \frac{[t]}{x} \models \varphi_1$. Somit: $[\mathfrak{I}_\Phi] \models \exists x \varphi_1$. ✓

- $\underline{\varphi = \forall x \varphi_1}$:

"$\Rightarrow$": Es gelte $[\mathfrak{I}_\Phi] \models \forall x \varphi_1$.

$\Rightarrow$ f.a. $t \in T_\sigma$ gilt: $[\mathfrak{I}_\Phi]\frac{[t]}{x} \models \varphi_1$

$\underset{\text{Subst.lemma}}{\Rightarrow}$ f.a. $t \in T_\sigma$ gilt: $[\mathfrak{I}_\Phi] \models \varphi_1\frac{t}{x}$

$\underset{\text{Ind.annahme}}{\Rightarrow}$ f.a. $t \in T_\sigma$ gilt: $\Phi \vdash_\mathfrak{S} \varphi_1\frac{t}{x}$ $\quad (*)$

Angenommen, $\Phi \nvdash_\mathfrak{S} \forall x \varphi_1$. Die Negationstreue von Φ liefert dann, dass $\Phi \vdash_\mathfrak{S} \neg\forall x \varphi_1$.

Die Quantorenaustauschregeln (QA) (siehe Lemma 7.20) liefern dann, dass $\Phi \vdash_\mathfrak{S} \exists x \neg\varphi_1$.

Da Φ Beispiele enthält, gibt es einen Term $u \in T_\sigma$ s.d. $\Phi \vdash_\mathfrak{S} (\exists x \neg\varphi_1 \to \neg\varphi_1\frac{u}{x})$.

Die Regel (MP) liefert, dass $\Phi \vdash_\mathfrak{S} \neg\varphi_1\frac{u}{x}$.

$(*)$ liefert, dass auch $\Phi \vdash_\mathfrak{S} \varphi_1\frac{u}{x}$ $\quad$ $\lightning$ Widerspruch zu "Φ wid.frei".

"$\Leftarrow$": Es gelte $\Phi \vdash_\mathfrak{S} \forall x \varphi_1$.

D.h. es gibt ein $\Gamma \subseteq_e \Phi$ s.d. die Sequenz $\Gamma \vdash \forall x \varphi_1$ in $\mathfrak{S}$ ableitbar ist

Sei $t \in T_\sigma$ beliebig. Dann sind folgende Sequenzen in $\mathfrak{S}$ ableitbar:

1) $\Gamma \vdash \forall x \varphi_1$

2) $\Gamma, \varphi_1 \frac{t}{x} \vdash \varphi_1 \frac{t}{x}$ (V)

3) $\Gamma, \forall x \varphi_1 \vdash \varphi_1 \frac{t}{x}$ ($\forall$A)

4) $\Gamma \vdash \varphi_1 \frac{t}{x}$ (KS) auf 1), 3)

Somit gilt für jedes $t \in T_\sigma$, dass $\Phi \vdash_{\mathfrak{S}} \varphi_1 \frac{t}{x}$.

Die Ind.annahme liefert, dass für jedes $t \in T_\sigma$ gilt: $[\mathfrak{I}_\Phi] \models \varphi_1 \frac{t}{x}$

Somit: $[\mathfrak{I}_\Phi] \models \forall x \varphi_1$. ✓

Dies schließt den Beweis des Satzes von Henkin ab. □

Im Folgenden werden wir zeigen, dass man jede widerspruchsfreie Menge $\Phi \subseteq FO[\sigma]$ erweitern kann zu einer Menge $\Theta \supseteq \Phi$, die widerspruchsfrei und negationstreu ist und Beispiele enthält.

Um dies zu zeigen, werden wir nutzen, dass die Signatur σ abzählbar ist.

Dazu gehen wir in 2 Schritten vor, die in den beiden folgenden Lemmas durchgeführt werden:

<u>Lemma 7.41</u>

Sei σ eine abzählbare Signatur und sei $\Phi \subseteq FO[\sigma]$ eine widerspruchsfreie Formelmenge mit

$$|\, Var \setminus frei(\Phi)\,| = \infty . \qquad \underline{(*)}$$

Dann gibt es eine widerspruchsfreie Formelmenge $\Psi \subseteq FO[\sigma]$ mit $\Phi \subseteq \Psi$, so dass Ψ Beispiele enthält.

(<u>Bemerkung</u>: Die Voraussetzung $\underline{(*)}$ ist wichtig; vergleiche Aufgabe 4 auf Übungsblatt 9)

<u>Beweis</u>: Sei $\exists x_0 \varphi_0$, $\exists x_1 \varphi_1$, $\exists x_2 \varphi_2$, ... eine Aufzählung aller $FO[\sigma]$-Formeln, die mit einem $\exists$-Quantor beginnen.

(Beachte: Eine solche Aufzählung existiert, da σ abzählbar ist. Details: Übung).

Induktiv definieren wir für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine Formel ψ_n wie folgt:

<u>$n = 0$:</u>

Sei y_0 die erste Variable in Var, die <u>nicht</u> in $\text{frei}(\Phi \cup \{\varphi_0\})$ vorkommt.

(Diese Variable existiert, da $|\text{Var} \setminus \text{frei}(\Phi)| = \infty$ ist und daher $\text{Var} \setminus \text{frei}(\Phi \cup \{\varphi_0\}) \neq \emptyset$.)

Setze $\psi_0 := \left(\exists x_0 \varphi_0 \to \varphi_0 \frac{y_0}{x_0} \right)$.

<u>$n \to n+1$:</u>

Sei y_{n+1} die erste Variable in Var, die <u>nicht</u> in $\text{frei}(\Phi \cup \{\psi_0, \dots, \psi_n\} \cup \{\varphi_{n+1}\})$ vorkommt.

(Diese Variable existiert, da $|\text{Var} \setminus \text{frei}(\Phi)| = \infty$ ist und daher $\text{Var} \setminus \text{frei}(\Phi \cup \{\psi_0, \dots, \psi_n\} \cup \{\varphi_{n+1}\}) \neq \emptyset$.)

Setze $\psi_{n+1} := \left(\exists x_{n+1} \varphi_{n+1} \to \varphi_{n+1} \frac{y_{n+1}}{x_{n+1}} \right)$.

Sei $\Psi_0 := \overline{\Phi}$,

$\Psi_1 := \overline{\Phi} \cup \{\psi_0\}$,

$\Psi_2 := \overline{\Phi} \cup \{\psi_0, \psi_1\}$, und allgemein,

für $n \in \mathbb{N}$, $\Psi_n := \overline{\Phi} \cup \{\psi_0, \ldots, \psi_{n-1}\}$.

Außerdem sei $\Psi := \overline{\Phi} \cup \{\psi_n : n \in \mathbb{N}\} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \Psi_n$

<u>Klar</u>: Gemäß Konstruktion von Ψ gilt:
Ψ enthält Beispiele.

Es bleibt zu zeigen, dass Ψ widerspruchsfrei ist.

<u>Behauptung</u>: F.a. $n \in \mathbb{N}$ gilt: Ψ_n ist widerspruchsfrei.

<u>Beweis</u>: Per Induktion nach n.

<u>$n=0$</u>: $\Psi_0 = \overline{\Phi}$ ist widerspruchsfrei gemäß der Voraussetzung von Lemma 7.41.

<u>$n \to n+1$</u>: Angenommen, Ψ_{n+1} ist widerspruchsvoll.

Gemäß Lemma 7.25 <u>(c)</u> gilt dann:

$$\Psi_{n+1} \vdash_{\mathfrak{S}} \exists v_0\, \neg v_0 = v_0 .$$

D.h. es gibt ein $\Gamma \subseteq_e \Psi_{n+1}$, so dass die Sequenz $\Gamma \vdash \exists v_0 \neg v_0 = v_0$ im Sequenzenkalkül $\mathfrak{S}$ ableitbar ist.

Fall 1: $\psi_n \notin \Gamma$.

Dann gilt: $\Gamma \subseteq \Psi_n$, und daher

$\Psi_n \vdash_{\mathfrak{S}} \exists v_0 \neg v_0 = v_0$.

Gemäß Lemma 7.25 (c) ist Ψ_n also widerspruchsvoll. ↯ Widerspruch zur Induktionsannahme.

Fall 2: $\psi_n \in \Gamma$.

Sei $\Gamma' := \Gamma \setminus \{\psi_n\}$. (Insbes. gilt: $\Gamma' \subseteq_e \Psi_n$)

Da die Sequenz $\Gamma \vdash \exists v_0 \neg v_0 = v_0$ in $\mathfrak{S}$ ableitbar ist, sind auch die folgenden Sequenzen in $\mathfrak{S}$ ableitbar:

1) $\Gamma', \left(\neg \exists x_n \varphi_n \vee \varphi_n \frac{y_n}{x_n}\right) \vdash \exists v_0 \neg v_0 = v_0$

(da $\Gamma' = \Gamma \cup \{\psi_n\}$ und $\psi_n = \left(\exists x_n \varphi_n \to \varphi_n \frac{y_n}{x_n}\right)$)

2) $\Gamma', \neg \exists x_n \varphi_n \vdash \neg \exists x_n \varphi_n$ (V)

3) $\Gamma', \neg \exists x_n \varphi_n \vdash \left(\neg \exists x_n \varphi_n \vee \varphi_n \frac{y_n}{x_n}\right)$ (vS)

4) $\Gamma', \neg \exists x_n \varphi_n \vdash \exists v_0 \neg v_0 = v_0$ (KS) auf 3), 1)

5) $\Gamma', \varphi_n \frac{y_n}{x_n} \vdash \varphi_n \frac{y_n}{x_n}$ (V)

6) $\Gamma', \varphi_n \frac{y_n}{x_n} \vdash (\neg \exists x_n \varphi_n \vee \varphi_n \frac{y_n}{x_n})$ (vS)

7) $\Gamma', \varphi_n \frac{y_n}{x_n} \vdash \exists v_0 \neg v_0 = v_0$ (KS) auf 6), 1)

8) $\Gamma', \exists x_n \varphi_n \vdash \exists v_0 \neg v_0 = v_0$ ($\exists$A) auf 7)

9) $\Gamma' \vdash \exists v_0 \neg v_0 = v_0$ (F) auf 8), 4).

D.h. die Sequenz $\Gamma' \vdash \exists v_0 \neg v_0 = v_0$ ist in $\mathfrak{S}$ ableitbar. Da $\Gamma' \subseteq \Psi_n$ ist, gilt also:

$\Psi_n \vdash_{\mathfrak{S}} \exists v_0 \neg v_0 = v_0$. Gemäß Lemma 7.25 (c) ist Ψ_n also widerspruchsvoll. $\lightning$ Widerspruch zur Induktionsannahme.

Somit haben wir gezeigt, dass für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Menge Ψ_n widerspruchsfrei ist. Da $\Psi = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \Psi_n$ ist, ist daher auch die Menge Ψ widerspruchsfrei (Details: Übung).

$\square_{\text{Lemma } 7.41}$

Lemma 7.42:

Sei σ eine abzählbare Signatur und sei $\Psi \subseteq FO[\sigma]$ eine widerspruchsfreie Formelmenge.

Dann gibt es eine widerspruchsfreie Formelmenge $\Theta \subseteq FO[\sigma]$ mit $\Psi \subseteq \Theta$, die negationstreu ist.

Beweis: Sei $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \ldots$ eine Aufzählung aller $FO[\sigma]$-Formeln.

(Beachte: Eine solche Aufzählung existiert, da σ abzählbar ist).

Induktiv definieren wir für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine Formelmenge Θ_n wie folgt:

$n = 0$: $\Theta_0 := \Psi$

$n \to n+1$: $$\Theta_{n+1} := \begin{cases} \Theta_n \cup \{\varphi_n\}, & \text{falls } \Theta_n \cup \{\varphi_n\} \text{ widerspruchsfrei ist} \\ \Theta_n & \text{sonst} \end{cases}$$

Sei $\Theta := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \Theta_n$.

Behauptung 1: Θ ist negationstreu.

Beweis: Sei φ eine beliebige $FO[\sigma]$-Formel.

Da $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \ldots$ eine Aufzählung aller $FO[\sigma]$-Formeln ist, gibt es ein $n \in \mathbb{N}$, so dass $\varphi = \varphi_n$ ist.

Wir müssen zeigen, dass $\Theta \vdash_{\mathfrak{K}} \varphi_n$ oder $\Theta \vdash_{\mathfrak{K}} \neg\varphi_n$ gilt. Dazu betrachten wir zwei Fälle:

Fall 1: $\varphi_n \in \Theta$.

Dann gilt offensichtlich, dass $\Theta \vdash_{\mathfrak{K}} \varphi_n$.

Fall 2: $\varphi_n \notin \Theta$.

Dann gilt: $\varphi_n \notin \Theta_{n+1}$ (da $\Theta_{n+1} \subseteq \Theta$).

Gemäß Definition der Menge Θ_{n+1} gilt daher, dass $\Theta_n \cup \{\varphi_n\}$ widerspruchsvoll ist.

Lemma 7.26 (b) liefert, dass $\Theta_n \vdash_{\mathfrak{K}} \neg\varphi_n$.

$\square_{\text{Beh 1}}$

Behauptung 2: Θ ist widerspruchsfrei.

Beweis: Übung.

Die Gültigkeit von Lemma 7.42 folgt unmittelbar aus Behauptung 1 und Behauptung 2. $\square_{\text{Lemma 7.42}}$

Wir können nun endlich das Erfüllbarkeitslemma für abzählbare Signaturen beweisen:

<u>Lemma 7.43</u> (Erfüllbarkeitslemma für abzählbare Signaturen)

Sei σ eine abzählbare Signatur und sei $\Phi \subseteq FO[\sigma]$ eine widerspruchsfreie Formelmenge.

Dann ist Φ erfüllbar.

<u>Beweis</u>:

Sei Φ' die Formelmenge, die aus Φ entsteht, indem man in jeder Formel aus Φ für jedes $i \in \mathbb{N}$ die Variable v_i überall ersetzt durch die Variable v_{2i}.

Dann gilt:

1) $\left| \text{Var} \setminus \text{frei}(\Phi') \right| = \infty$

(da keine der Variablen $v_1, v_3, v_5, v_7, v_9, \ldots$ in Φ' vorkommt).

2) Φ' ist widerspruchsfrei

(Denn angenommen nicht, dann gilt gemäß Lemma 7.25 (c), dass $\Phi' \vdash_{\mathfrak{S}} \exists v_0 \neg v_0 = v_0$

Somit gibt es ein $\Gamma' \subseteq_e \Phi'$ so dass die Sequenz $\Gamma' \vdash \exists v_0 \neg v_0 = v_0$ in $\mathfrak{S}$ ableitbar ist.

Sei Γ die Formelmenge, die aus Γ' entsteht, indem jede Variable der Form v_{2i} ersetzt wird durch die Variable v_i.

Durch geeignetes Umbenennen von Variablen in der Ableitung der Sequenz $\Gamma' \vdash \exists v_0 \neg v_0 = v_0$ erhält man eine Ableitung der Sequenz $\Gamma \vdash \exists v_0 \neg v_0 = v_0$. Wegen $\Gamma \subseteq_e \Phi$ ist daher Φ widerspruchsvoll

↯ Widerspruch)

3) Wenn Φ' erfüllbar ist, dann ist auch Φ erfüllbar

(Denn aus einer Interpretation, die Φ' erfüllt, lässt sich leicht eine Interpretation bilden, die Φ erfüllt)

Wegen 3) genügt es, zu zeigen, dass Φ' erfüllbar ist.

Wegen 1) und 2) erfüllt Φ' die Voraussetzungen von Lemma 7.41. Daher gibt es eine widerspruchsfreie Formelmenge $\Psi \subseteq FO[\sigma]$, mit $\Phi' \subseteq \Psi$, so dass Ψ Beispiele enthält.

Gemäß Lemma 7.42 gibt es eine negationstreue, widerspruchsfreie Formelmenge $\Theta \subseteq FO[\sigma]$ mit $\Psi \subseteq \Theta$. Da Ψ Beispiele enthält, enthält auch Θ Beispiele.

Der Satz von Henkin (Satz 7.40) liefert, dass $[\mathcal{I}_\Theta] \models \Theta$. Wegen $\Phi' \subseteq \Theta$ gilt insbesondere, dass $[\mathcal{I}_\Theta] \models \Phi'$. Somit ist Φ' erfüllbar. Gemäß 3) ist daher auch Φ erfüllbar.

$\square_{\text{Lemma 7.43}}$

Insgesamt ist damit der Beweis des Erfüllbarkeitslemmas und damit auch der Beweis des Vollständigkeitssatzes (für den Spezialfall, dass σ eine abzählbare Signatur ist), abgeschlossen.

In den nächsten beiden Kapiteln werden wir noch einige wichtige Sätze kennenlernen, die sich leicht aus dem Vollständigkeitssatz folgern lassen.