Kapitel 5: Der Satz von McNaughton und Papert

Der Satz von McNaughton und Papert (1971) besagt, dass die Logik erster Stufe genau die sternfreien regulären Wortsprachen beschreiben kann.

Sei $\Sigma := \{a_1, \dots, a_\ell\}$ ein endliches Alphabet, das (für eine Zahl $\ell \in \mathbb{N}_{>0}$) aus ℓ verschiedenen Buchstaben besteht.

Definition 5.1

(a) Sei σ_Σ die Signatur, die aus den folgenden Relationssymbolen besteht:

- σ_Σ enthält ein 2-stelliges Relationssymbol $\leq$
- für jeden Buchstaben $a \in \Sigma$ enthält σ_Σ ein 1-stelliges Relationssymbol P_a

(b) $\sigma_\Sigma' := \sigma_\Sigma \cup \{max\}$ sei die Signatur, die zusätzlich zu den Symbolen aus σ_Σ noch ein Konstantensymbol max enthält.

Definition 5.2

Einem endlichen Wort $w = w_1 \cdots w_n$ der Länge $n \geq 1$ über dem Alphabet Σ ordnen wir die folgende σ_Σ-Struktur

$$\mathfrak{A}_w = \left(A_w, \leq^{\mathfrak{A}_w}, P_{a_1}^{\mathfrak{A}_w}, \ldots, P_{a_\ell}^{\mathfrak{A}_w} \right) \text{ zu:}$$

- $A_w := \{1, \ldots, n\}$
- $\leq^{\mathfrak{A}_w}$ ist die natürliche lineare Ordnung auf $\{1, \ldots, n\}$
- für jedes $a_j \in \Sigma$ ist $P_{a_j}^{\mathfrak{A}_w} := \{ i \in A_w : w_i = a_j \}$.

Die σ_Σ'-Struktur $\mathfrak{A}_w'$ ist definiert durch

$$\mathfrak{A}_w' := \left(A_w, \leq^{\mathfrak{A}_w}, P_{a_1}^{\mathfrak{A}_w}, \ldots, P_{a_\ell}^{\mathfrak{A}_w}, \max^{\mathfrak{A}_w'} \right)$$

mit $\max^{\mathfrak{A}_w'} := n$.

Beispiel 5.3

Ist $\Sigma = \{a, b\}$ und $w = aaab$, so ist

$\mathfrak{A}_w$ die σ_Σ-Struktur mit

- Universum $\{1, 2, 3, 4\}$
- $\leq^{\mathfrak{A}_w}$ = die lineare Ordnung auf $\{1, 2, 3, 4\}$
- $P_a^{\mathfrak{A}_w} = \{1, 2, 3\}$
- $P_b^{\mathfrak{A}_w} = \{4\}$

$\mathfrak{A}'_w$ ist die σ'_Σ-Struktur, die mit $\mathfrak{A}_w$ auf σ_Σ übereinstimmt, und bei der $max^{\mathfrak{A}'_w} = 4$ ist.

Definition 5.4

(a) Sei $L \subseteq \Sigma^*$ und sei φ ein $FO[\sigma'_\Sigma]$-Satz.

Wir sagen: φ beschreibt L, falls für jedes nicht-leere Wort $w \in \Sigma^*$ gilt:

$$w \in L \iff \mathfrak{A}'_w \models \varphi.$$

(b) $L \subseteq \Sigma^*$ heißt FO-definierbar, falls es einen $FO[\sigma'_\Sigma]$-Satz φ gibt, der L beschreibt.

Beispiel 5.5

Für $\Sigma := \{a, b\}$ gilt:

Der $FO[\sigma_\Sigma']$ - Satz $\varphi :=$

$$\Big(P_b(\max) \land \exists x \forall y \big((y \leq x \to P_a(y)) \land (x \leq y \to (P_b(y) \lor y = x)) \big) \Big)$$

beschreibt die Sprache $L \subseteq \Sigma^*$, die durch den regulären Ausdruck $a^* a b^* b$ definiert wird.

Definition 5.6

(a) Die Klasse SFR_Σ aller <u>sternfreien regulären Ausdrücke</u> über Σ ist rekursiv wie folgt definiert:

- das Symbol $\emptyset$ gehört zu SFR_Σ
- für jedes $a \in \Sigma$ gehört das Symbol a zu SFR_Σ
- Sind $r \in SFR_\Sigma$ und $s \in SFR_\Sigma$, so gehören auch die folgenden Ausdrücke zu SFR_Σ:
  - $\overline{r}$
  - $(r \mid s)$
  - $(r \cdot s)$

(b) Jeder sternfreie reguläre Ausdruck r beschreibt eine Sprache $L(r) \subseteq \Sigma^*$, die wie folgt definiert ist:

- $L(\emptyset) = \emptyset$
- für jedes $a \in \Sigma$ ist $L(a) = \{a\}$
- für alle $r \in SFR_\Sigma$ und $s \in SFR_\Sigma$ ist
  - $L(\overline{r}) := \Sigma^* \setminus L(r)$
  - $L((r|s)) := L(r) \cup L(s)$
  - $L((r \cdot s)) := \{ wu : w \in L(r), u \in L(s) \}$

(c) Eine Sprache $L \subseteq \Sigma^*$ heißt sternfrei regulär, wenn es ein $r \in SFR_\Sigma$ mit $L(r) = r$ gibt.

Beispiel 5.7

Die durch den regulären Ausdruck $(a|b)^* a (a|b)^* b$ definierte Sprache wird durch den sternfreien regulären Ausdruck $((\overline{\emptyset} \cdot a) \cdot (\overline{\emptyset} \cdot b))$ beschrieben.

Satz 5.8 (Der Satz von McNaughton und Papert, 1971)

Für jede Sprache $L \subseteq \Sigma^*$ gilt:

L ist sternfrei regulär $\iff$ L ist FO-definierbar.

Beweis:

"$\Longrightarrow$": Per Induktion über den Aufbau der sternfreien regulären Ausdrücke zeigt man, dass es für jedes $r \in STR_\Sigma$ einen $FO[\sigma_\Sigma]$-Satz φ_r gibt, der die Sprache $L(r)$ beschreibt (beachte: $\sigma_\Sigma = \sigma'_\Sigma \setminus \{max\}$)

"$\Longleftarrow$": Wir benutzen das folgende Lemma:

Kompositionslemma:

Ist $m \in \mathbb{N}$ und sind $w, \tilde{w}, u, \tilde{u}$ nicht-leere Worte über dem Alphabet $\Sigma = \{a_1, \ldots, a_\ell\}$, so dass

$\mathfrak{A}'_w \approx_m \mathfrak{A}'_{\tilde{w}}$ und $\mathfrak{A}'_u \approx_m \mathfrak{A}'_{\tilde{u}}$, so gilt für $p := |w|$ und $\tilde{p} := |\tilde{w}|$, dass

$(\mathfrak{A}'_{wu}, p) \approx_m (\mathfrak{A}'_{\tilde{w}\tilde{u}}, \tilde{p})$, d.h.

Duplicator hat eine Gewinnstrategie im m-Runden EF-Spiel auf $(\mathcal{A}'_{wu}, p)$ und $(\mathcal{A}'_{\tilde{w}\tilde{u}}, \tilde{p})$.

Beweis des Kompositionslemmas: Übung.

Um die Richtung "$\Leftarrow$" von Satz 5.8 zu beweisen, gehen wir per Induktion über die Quantorentiefe m von $FO[\sigma'_\Sigma]$-Sätzen vor.

Induktionsanfang: $m=0$

Sei φ ein $FO[\sigma'_\Sigma]$-Satz der Quantorentiefe $m=0$.

Fall 1: φ ist von der Form $P_a(max)$ für ein $a \in \Sigma$.

Dann beschreibt φ dieselbe Sprache wie der sternfreie reguläre Ausdruck $(\overline{\emptyset} \cdot a)$.

Fall 2: φ ist von der Form $max \leq max$ oder von der Form $max = max$.

Dann beschreibt φ dieselbe Sprache wie der sternfreie reguläre Ausdruck $\overline{\emptyset}$.

<u>Fall 3:</u> φ ist von der Form $\neg\varphi_1$, wobei φ_1 ein $FO[\sigma_\Sigma']$-Satz der Quantorentiefe $m=0$ ist.
Per Induktion gibt es dann einen sternfreien regulären Ausdruck r, der dieselbe Sprache wie φ_1 beschreibt.
Der reguläre Ausdruck $\overline{r}$ beschreibt dann dieselbe Sprache wie φ.

<u>Fall 4:</u> φ ist von der Form $(\varphi_1 \vee \varphi_2)$, wobei φ_1 und φ_2 $FO[\sigma_\Sigma']$-Sätze der Quantorentiefe $m=0$ sind. Per Induktion gibt es dann r_1 und r_2 in SFR_Σ, die dieselben Sprachen wie φ_1 und φ_2 beschreiben.
Der reguläre Ausdruck $(r_1 | r_2)$ beschreibt dann dieselbe Sprache wie φ.

<u>Fall 5:</u> φ ist von der Form $(\varphi_1 \wedge \varphi_2)$ oder $(\varphi_1 \rightarrow \varphi_2)$ oder $(\varphi_1 \leftrightarrow \varphi_2)$:
Folgt durch eine Kombination der Fälle 3 und 4, da

$$
\begin{aligned}
(\varphi_1 \wedge \varphi_2) &\equiv \neg(\neg\varphi_1 \vee \neg\varphi_2)\\
(\varphi_1 \rightarrow \varphi_2) &\equiv (\neg\varphi_1 \vee \varphi_2)\\
(\varphi_1 \leftrightarrow \varphi_2) &\equiv ((\varphi_1 \rightarrow \varphi_2) \wedge (\varphi_2 \rightarrow \varphi_1))
\end{aligned}
$$

Induktionsschritt: $m \to m+1$: Sei $m \geq 0$.

Induktionsannahme: Für jeden $FO[\sigma'_\Sigma]$-Satz ψ der Quantorentiefe $\leq m$ gibt es einen sternfreien regulären Ausdruck $r_\psi \in SFR_\Sigma$, der dieselbe Sprache wie ψ beschreibt.

Behauptung: Für jeden $FO[\sigma'_\Sigma]$-Satz φ der Quantorentiefe $m+1$ gibt es einen sternfreien regulären Ausdruck $r_\varphi \in SFR_\Sigma$, der dieselbe Sprache wie φ beschreibt.

Beweis: Per Induktion nach dem Aufbau von $FO[\sigma'_\Sigma]$-Sätzen der Quantorentiefe $m+1$.

Fall 1: φ ist von der Form $\exists x\, \psi(x)$, wobei $\psi(x)$ eine $FO[\sigma'_\Sigma]$-Formel der Quantorentiefe m mit $frei(\psi) = \{x\}$ ist.

Wir betrachten die Menge

$$m\text{-Typen}_0 := \left\{ \varphi^m_{\mathfrak{A}} : \begin{array}{l} \mathfrak{A} \text{ ist eine} \\ \sigma'_\Sigma\text{-Struktur} \end{array} \right\}$$

aller m-Isomorphietypen von σ'_Σ-Strukturen.

Von Bemerkung 3.20 wissen wir, dass

m-Typen$_0$ eine <u>endliche</u> Menge von $FO[\sigma'_\Sigma]$-Sätzen

der Quantorentiefe $\leq m$ ist.

Sei S_ψ die folgendermaßen definierte Menge

aller Paare (τ, τ') von Elementen aus m-Typen$_0$:

$S_\psi := \{ (\tau, \tau')$: $\tau, \tau' \in$ m-Typen$_0$,

es gibt nicht-leere Worte

$\tilde{w} \in \Sigma^*$ und $\tilde{u} \in \Sigma^*$, so dass für

$\tilde{p} := |\tilde{w}|$ gilt:

- $\mathfrak{A}'_{\tilde{w}\tilde{u}} \models \psi[\tilde{p}]$ und
- $\mathfrak{A}'_{\tilde{w}} \models \tau$ und
- $\mathfrak{A}'_{\tilde{u}} \models \tau'$ $\}$.

<u>Beachte</u>: S_ψ ist endlich, da m-Typen$_0$ endlich ist.

Behauptung ⊛:

Für alle nicht-leeren Worte $v \in \Sigma^*$ gilt:

$$\mathfrak{A}'_v \models \exists x\, \psi(x)$$

$\iff$ $\mathfrak{A}'_v \models \psi \frac{max}{x}$ oder

es gibt eine Position $p \in \{1, \dots, |v|-1\}$ und ein Paar $(\tau, \tau') \in S_\psi$, so dass für die nicht-leeren Worte w und u mit $v = wu$ und $|w| = p$ gilt:

$$\mathfrak{A}'_w \models \tau \qquad \text{und} \qquad \mathfrak{A}'_u \models \tau'$$

(d.h. τ und τ' sind die m-Isomorphietypen von w und u)

Beweis von Behauptung ⊛:

"$\Rightarrow$": Folgt direkt aus der Definition der Menge S_ψ.

"$\Leftarrow$": klar: Falls $\mathfrak{A}'_v \models \psi \frac{max}{x}$, so gilt: $\mathfrak{A}'_v \models \exists x\, \psi(x)$.

Sei also $p \in \{1, \dots, |v|-1\}$ und sei $(\tau, \tau') \in S_\psi$, so dass für die nicht-leeren Worte w und u mit $v = wu$ und $|w| = p$ gilt:

(1) $\tau = \varphi^m_{\mathfrak{A}'_w}$ und $\tau' = \varphi^m_{\mathfrak{A}'_u}$.

Wir müssen zeigen, dass dann auch $\mathfrak{A}'_{wu} \models \exists x\, \psi(x)$ gilt.

Wegen $(\tau, \tau') \in S_\psi$ muss es gemäß der Definition der Menge S_ψ nicht-leere Worte $\tilde{w} \in \Sigma^*$ und $\tilde{u} \in \Sigma^*$ geben, so dass für $\tilde{p} := |\tilde{w}|$ gilt:

<u>(2)</u> $\mathfrak{A}'_{\tilde{w}\tilde{u}} \models \psi[\tilde{p}]$ und $\mathfrak{A}'_{\tilde{w}} \models \tau$ und $\mathfrak{A}'_{\tilde{u}} \models \tau'$.

Aus (1) und (2) folgt gemäß dem Satz von Ehrenfeucht (Satz 3.21), dass

$$\mathfrak{A}'_w \approx_m \mathfrak{A}'_{\tilde{w}} \quad \text{und} \quad \mathfrak{A}'_u \approx_m \mathfrak{A}'_{\tilde{u}}.$$

Das Kompositionslemma liefert dann, dass auch gilt:

$$(\mathfrak{A}'_{wu}, p) \approx_m (\mathfrak{A}'_{\tilde{w}\tilde{u}}, \tilde{p})$$

Wegen $m = qr(\psi)$ und $\mathfrak{A}'_{\tilde{w}\tilde{u}} \models \psi[\tilde{p}]$ (gemäß (2)), liefert der Satz von Ehrenfeucht (Satz 3.21) daher, dass auch $\mathfrak{A}'_{wu} \models \psi[p]$ gilt.

Somit gilt: $\mathfrak{A}'_{wu} \models \exists x\, \psi(x)$.

$\square$ Behauptung (*)

Für den Satz $\varphi = \exists x\, \psi(x)$ liefert Behauptung ⊛, dass die von φ beschriebene Sprache folgendermaßen aussieht:

$$\{ v \in \Sigma^* : v \text{ ist nicht-leer und } \mathcal{A}'_v \models \varphi \}$$

$$\underset{\text{Beh}⊛}{=} \{ v \in \Sigma^* : v \text{ ist nicht-leer und } \mathcal{A}'_v \models \psi \tfrac{\max}{x} \}$$

$$\cup \bigcup_{(\tau,\tau') \in S_\psi} L_{(\tau,\tau')} ,$$

wobei $L_{(\tau,\tau')} := \{ wu : \; w \in \Sigma^* \text{ und } u \in \Sigma^*, \; w \text{ und } u \text{ sind nicht-leer und } \mathcal{A}'_w \models \tau \text{ und } \mathcal{A}'_u \models \tau' \}$.

Da τ und τ' $FO[\sigma'_\Sigma]$-Sätze der Quantorentiefe $\leq m$ sind, gibt es laut Induktionsannahme sternfreie reguläre Ausdrücke r_τ und $r_{\tau'}$, die dieselben Sprachen wie τ und τ' beschreiben.

Daher gilt: $L_{(\tau,\tau')} = L\big((r_\tau \cdot r_{\tau'}) \big)$.

Außerdem ist $\psi \frac{\max}{x}$ ein $FO[\sigma'_\Sigma]$-Satz der Quantorentiefe m. Laut Induktionsannahme gibt es daher einen sternfreien regulären Ausdruck

$r_{\psi^{max}_{=x}}$, der dieselbe Sprache wie $\psi^{max}_{=x}$ beschreibt.

Insgesamt gilt: Ist $(\tau_1, \tau_1'), \dots, (\tau_t, \tau_t')$ eine Liste aller Elemente in der Menge S_ψ, so beschreibt der sternfreie reguläre Ausdruck

$$r_\varphi := \left(r_{\psi^{max}_{=x}} \;\middle|\; \left((r_{\tau_1} \cdot r_{\tau_1'}) \,|\, \cdots \,|\, (r_{\tau_t} \cdot r_{\tau_t'}) \right) \right)$$

dieselbe Sprache wie der $FO[\sigma_\Sigma]$-Satz φ.

Somit ist der Beweis von Fall 1 des Induktionsschritts abgeschlossen.

Fall 2: φ ist von der Form $\forall x \psi$:

Beachte, dass $\varphi \equiv \neg \exists x \neg \psi$.

Gemäß Fall 1 gibt es einen sternfreien regulären Ausdruck r, der dieselbe Sprache wie der Satz $\exists x \neg \psi$ beschreibt.

Klar: Der sternfreie reguläre Ausdruck $\overline{r}$ beschreibt dieselbe Sprache wie φ.

Fall 3: φ ist von der Form $\neg\varphi_1$ oder von der Form $(\varphi_1 * \varphi_2)$ mit $* \in \{\vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow\}$, wobei φ_1 und φ_2 $FO[\sigma_\Sigma^<]$-Sätze der Quantorentiefe $m+1$ sind:

Analog zu Fall 3, Fall 4 und Fall 5 des Induktionsanfangs.

Insgesamt ist damit der Beweis von Satz 5.8 abgeschlossen.

$\square$

Bemerkung 5.9:

Aus dem Satz von McNaughton und Papert und den Ergebnissen aus Kapitel 4 lässt sich leicht folgern, dass es reguläre Sprachen gibt, die nicht sternfrei regulär sind

Details: Übung