Kapitel 2: Normalformen

2.1 Äquivalenz und Folgerung

<u>Definition 2.1</u> (Äquivalenz, Folgerung)

Seien $\varphi, \psi \in FO[\sigma]$

<u>(a)</u> φ und ψ heißen <u>äquivalent</u> (kurz: $\varphi \equiv \psi$, bzw $\varphi \models\!\dashv \psi$)
wenn für alle zu φ und ψ passenden σ-Interpretationen
$\mathcal{I}$ gilt: $\mathcal{I} \models \varphi \iff \mathcal{I} \models \psi$

<u>(b)</u> <u>ψ folgt aus φ</u> (bzw φ impliziert ψ, kurz:
$\varphi \models \psi$) wenn für alle zu φ und ψ passenden
σ-Interpretationen $\mathcal{I}$ gilt:
Falls $\mathcal{I} \models \varphi$, so auch $\mathcal{I} \models \psi$.

<u>Beobachtung</u>: Für alle $\varphi, \psi \in FO[\sigma]$ gilt:

- $\varphi \equiv \psi \iff \varphi \models \psi$ und $\psi \models \varphi$
- $\varphi \models \psi \iff (\varphi \rightarrow \psi)$ ist allgemeingültig
- $\varphi \equiv \psi \iff (\varphi \leftrightarrow \psi)$ ist allgemeingültig

Beobachtung 2.2

Für alle $\varphi, \psi \in FO[\sigma]$ gilt:

- $(\varphi \wedge \psi) \equiv \neg(\neg\varphi \vee \neg\psi)$
- $(\varphi \rightarrow \psi) \equiv (\neg\varphi \vee \psi)$
- $(\varphi \leftrightarrow \psi) \equiv (\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \varphi)$
  $\equiv (\neg(\varphi \vee \psi) \vee \neg(\neg\varphi \vee \neg\psi))$
- $\forall x\, \varphi \equiv \neg \exists x\, \neg\varphi$

Daher können wir, falls nötig, auf die Symbole $\wedge, \rightarrow, \leftrightarrow, \forall$ verzichten. D.h.: Jede $FO[\sigma]$-Formel φ ist äquivalent zu einer $FO[\sigma]$-Formel, in der keins der Symbole $\wedge, \rightarrow, \leftrightarrow, \forall$ vorkommt.

2.2 Das Substitutionslemma

Anschaulich besagt das Substitutionslemma folgendes:

Sei φ eine $FO[\sigma]$-Formel.
Ersetzt man in φ eine freie Variable x durch einen Term $t(y_1, \ldots, y_n)$, so sagt die dadurch entstehende Formel φ' über den Term $t(y_1, \ldots, y_n)$ dasselbe aus wie die Formel φ über die Variable x.

Etwas Vorsicht ist allerdings beim "Ersetzen" geboten:

Beispiel 2.3:

Betrachte die $FO[\sigma_{Ar}]$-Formel

$$\varphi(v_0) := \exists v_1 \; v_1 + v_1 = v_0 ,$$

die in $\mathcal{N}$ besagt, dass v_0 eine gerade Zahl ist.

(a) Ersetzt man die Variable v_0 durch die Variable v_5, so erhält man die Formel

$$\varphi(v_5) = \exists v_1 \; v_1 + v_1 = v_5 ,$$

die in $\mathcal{N}$ besagt, dass v_5 gerade ist.

(b) Ersetzt man die Variable v_0 durch den Term $(v_0 \times v_0) + 1$ so erhält man die Formel

$$\exists v_1 \; v_1 + v_1 = (v_0 \times v_0) + 1 ,$$

die in $\mathcal{N}$ besagt, dass $(v_0 \times v_0) + 1$ gerade ist.

(c) Ersetzt man aber die (gebundene) Variable v_1 durch die (freie) Variable v_0, so erhält man die Formel

$$\exists v_0 \; v_0 + v_0 = v_0$$

Diese Formel hat eine völlig andere Bedeutung als die Formel $\varphi(v_0)$.

Daher sollte man nur freie Variablen ersetzen!

(d) Ersetzt man die (freie) Variable v_0 durch v_1, so erhält man die Formel

$$\exists v_1 \; v_1 + v_1 = v_1 ,$$

die ähnlich wie in (c) eine ganz andere Bedeutung hat als die Formel $\varphi(v_0)$.

Beim Ersetzen von freien Variablen muss man daher aufpassen, dass es keine Konflikte mit gebundenen Variablen gibt. Die gebundenen Variablen werden daher – falls nötig – umbenannt.

Der Begriff des "Ersetzens" von Variablen wird daher folgendermaßen formalisiert:

Definition 2.4

(a) Eine σ-Substitution ist eine Abbildung

$$S : D \to T_\sigma ,$$

wobei $D = \mathrm{Def}(S) \subseteq \mathrm{Var}$ endlich ist.

(b) Für eine σ-Substitution S sei $\mathrm{var}(S)$ die Menge aller Variablen, die in einem Term im Bild von S vorkommen. D.h.:

$$\mathrm{var}(S) := \bigcup_{x \in \mathrm{def}(S)} \mathrm{var}(S(x))$$

Definition 2.5 (Substitution in Termen)

Sei S eine σ-Substitution.
Induktiv über den Aufbau von T_σ definieren wir für jedes $t \in T_\sigma$ den Term tS, der aus t durch Anwenden der Substitution S entsteht:

- f.a. $x \in Var$ ist
$$xS := \begin{cases} S(x), & \text{falls } x \in Def(S) \\ x & \text{sonst.} \end{cases}$$

- f.a. Konstantensymbole $c \in \sigma$ ist
$$cS := c$$

- f.a. $k \in \mathbb{N}_{>0}$, f.a. k-stelligen Funktionssymbole $f \in \sigma$, f.a. σ-Terme $t_1, \dots, t_k$ ist
$$f(t_1, \dots, t_k)S := f(t_1S, \dots, t_kS)$$

Definition 2.6 (Substitution in Formeln)

Induktiv über den Aufbau von $FO[\sigma]$ definieren wir für alle σ-Substitutionen S und alle $FO[\sigma]$-Formeln φ die Formel φS, die aus φ

durch Anwenden der Substitution S entsteht:

- Ist φ von der Form $t_1 = t_2$ mit $t_1, t_2 \in T_\sigma$, so

$$\varphi S := t_1 S = t_2 S$$

- Ist φ von der Form $R(t_1, \dots, t_k)$ mit $R \in \sigma$, $k = ar(R)$, $t_1, \dots, t_k \in T_\sigma$, so

$$\varphi S := R(t_1 S, \dots, t_k S)$$

- Ist φ von der Form $\neg\psi$ mit $\psi \in FO[\sigma]$, so

$$\varphi S := \neg \psi S$$

- Ist φ von der Form $(\psi_1 * \psi_2)$ mit $\psi_1, \psi_2 \in FO[\sigma]$, $* \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$, so

$$\varphi S := (\psi_1 S * \psi_2 S)$$

- Ist φ von der Form $Qx\,\psi$ mit $Q \in \{\exists, \forall\}$, $x \in Var$, $\psi \in FO[\sigma]$, so ist

$$\varphi S := Qy\, \psi S', \quad \text{wobei } y \text{ und } S'$$

folgendermaßen gewählt sind:

- falls $x \notin var(S)$, so
  $y := x$ und $S' := S|_{Def(S) \setminus \{x\}}$

- falls $x \in var(S)$, so
  ist y die in der Aufzählung $v_0, v_1, v_2, v_3, \dots$ von Var erste Variable, die nicht in φ vorkommt und nicht in $var(S)$

liegt, und

$$S' := S|_{\mathrm{Def}(S)\setminus\{x\}} \cup \{(x,y)\}.$$

(d.h.: die Variable x wird konsistent umbenannt zu y).

Notation 2.7:

(a) Wir schreiben σ-Substitutionen S mit $\mathrm{Def}(S) = \{x_1, \dots, x_n\}$ und $t_i = S(x_i)$ für $i = 1, \dots, n$ auch in der Form

$$\frac{t_1, \dots, t_n}{x_1, \dots, x_n}$$

Insbes. schreiben wir für $\mathrm{FO}[\sigma]$-Formeln φ auch

$$\varphi \frac{t_1, \dots, t_n}{x_1, \dots, x_n} \quad \text{an Stelle von} \quad \varphi S.$$

(b) Für eine Formel $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ mit $\mathrm{frei}(\varphi) \subseteq \{x_1, \dots, x_n\}$ und für Terme $t_1, \dots, t_n$ schreiben wir auch

$$\varphi(t_1, \dots, t_n) \quad \text{an Stelle von} \quad \varphi \frac{t_1, \dots, t_n}{x_1, \dots, x_n}.$$

Entsprechende Schreibweisen verwenden wir auch für Terme

Beispiele 2.8

Sei $\sigma := \{ \underset{2}{f}, \underset{2}{R} \}$.

(a) Für $\varphi := R(v_0, f(v_1, v_2))$ gilt

$$\varphi \frac{v_2, v_0, v_1}{v_1, v_2, v_3} = R(v_0, f(v_2, v_0))$$

(b) Für $\varphi := \exists v_0 \, R(v_0, f(v_1, v_2))$ gilt

$$\varphi \frac{v_4, \; f(v_1, v_1)}{v_0 \quad v_2} = \exists v_0 \left(R(v_0, f(v_1, v_2)) \frac{f(v_1, v_1)}{v_2} \right)$$

$$= \exists v_0 \, R(v_0, f(v_1, f(v_1, v_1)))$$

(c) Für $\varphi := \exists v_0 \, R(v_0, f(v_1, v_2))$ gilt

$$\varphi \frac{v_0 \quad v_4}{v_1 \quad v_0} = \exists v_3 \; R(v_0, f(v_1, v_2)) \frac{v_0, v_3}{v_1, v_0}$$

$$= \exists v_3 \, R(v_3, f(v_0, v_2)).$$

Definition 2.9 (Anwenden von Substitutionen auf Interpretationen)

Für jede σ-Substitution S und jede σ-Interpretation $\mathcal{I} = (\mathcal{A}, \beta)$ mit $\mathrm{var}(S) \subseteq \mathrm{def}(\beta)$ sei

$$\mathcal{I}\tilde{S} := (\mathcal{A}, \beta\tilde{S}), \qquad \text{wobei}$$

$\beta\tilde{S} : \mathrm{Def}(\beta) \cup \mathrm{Def}(S) \to A$ die folgendermaßen definierte Belegung ist:

- f.a. $x \in \mathrm{Def}(S)$ ist $\beta\tilde{S}(x) := [\![S(x)]\!]^{\mathcal{I}}$
- f.a. $x \in \mathrm{Def}(\beta) \setminus \mathrm{Def}(S)$ ist $\beta\tilde{S}(x) := \beta(x)$

Satz 2.10 (Das Substitutionslemma)

Sei S eine σ-Substitution und sei $\mathcal{I} = (\mathcal{A}, \beta)$ eine σ-Interpretation mit $\mathrm{var}(S) \subseteq \mathrm{Def}(\beta)$.

(a) Für alle σ-Terme t mit $\mathrm{var}(t) \subseteq \mathrm{Def}(\beta) \cup \mathrm{Def}(S)$ gilt:

$$[\![tS]\!]^{\mathcal{I}} = [\![t]\!]^{\mathcal{I}S}$$

(b) Für alle $\mathrm{FO}[\sigma]$-Formeln φ mit $\mathrm{frei}(\varphi) \subseteq \mathrm{Def}(\beta) \cup \mathrm{Def}(S)$ gilt:

$$\mathcal{I} \models \varphi\tilde{S} \iff \mathcal{I}\tilde{S} \models \varphi.$$

Beweis: Übung (per Induktion über den Aufbau von Termen bzw. Formeln).

2.3 Die pränexe Normalform

Definition 2.11

(a) Eine $FO[\sigma]$-Formel ψ heißt <u>quantorenfrei</u>, falls in ihr keins der Symbole $\exists, \forall$ vorkommt

(b) Eine $FO[\sigma]$-Formel φ ist in <u>pränexer Normalform</u> (bzw <u>Pränex-Normalform</u>), wenn sie von der Form

$$Q_1 x_1 \cdots Q_n x_n \,\psi$$

ist, wobei $n \geq 0$, $Q_1, \ldots, Q_n \in \{\exists, \forall\}$, $x_1, \ldots, x_n \in Var$ und ψ quantorenfrei ist.

$Q_1 x_1 \cdots Q_n x_n$ wird <u>Quantoren-Präfix von φ</u> genannt; ψ heißt <u>Kern</u> von φ bzw <u>Matrix</u> von φ.

Satz 2.12 (Satz über die pränexe Normalform)

Jede $FO[\sigma]$-Formel φ ist äquivalent zu einer $FO[\sigma]$-Formel φ' in pränexer Normalform mit $frei(\varphi') = frei(\varphi)$.

Bevor wir Satz 2.12 beweisen, betrachten wir zunächst ein Beispiel:

Beispiel 2.13

Sei $\varphi(y) := \forall x \neg (\exists y\, E(x,y) \to \exists x\, E(x,y))$

Umformung in eine äquivalente Formel in Pränex-Normalform:

$\varphi \equiv \forall x \neg (\neg \exists y\, E(x,y) \vee \exists x\, E(x,y))$	Elimination von "$\to$"
$\equiv \forall x \neg (\forall y \neg E(x,y) \vee \exists x\, E(x,y))$	$\neg \exists y\, \psi \equiv \forall y \neg \psi$
$\equiv \forall x \neg (\forall z_1 \neg E(x,z_1) \vee \exists z_2\, E(z_2,y))$	Umbenennung von gebundenen Variablen
$\equiv \forall x \neg \forall z_1 \exists z_2 (\neg E(x,z_1) \vee E(z_2,y))$	Zusammenlegung der Disjunktion
$\equiv \forall x \exists z_1 \forall z_2 \neg (\neg E(x,z_1) \vee E(z_2,y))$	Negation
$(\equiv \forall x \exists z_1 \forall z_2 (E(x,z_1) \wedge \neg E(z_2,y)))$	(De Morgan)

Beweis von Satz 2.12

Wir zeigen zunächst zwei Dinge:

Behauptung 1:

Sei $\psi := Q_1 x_1 \cdots Q_n x_n \chi$, wobei $n \geq 0$,

$Q_1, \ldots, Q_n \in \{\exists, \forall\}$ und $\chi \in FO[\sigma]$.

Für jedes $Q \in \{\exists, \forall\}$ sei

$$\tilde{Q} := \begin{cases} \forall, & \text{falls } Q = \exists \\ \exists, & \text{falls } Q = \forall. \end{cases}$$

Dann gilt:

$$\neg\psi \equiv \tilde{Q}_1 x_1 \cdots \tilde{Q}_n x_n \neg\chi$$

Beweis von Beh. 1:

Einfaches Nachrechnen per Induktion über n unter Verwendung der Tatsache, dass

$$\neg\exists x\, \vartheta \equiv \forall x \neg\vartheta \quad \text{und} \quad \neg\forall x\, \vartheta \equiv \exists x \neg\vartheta.$$

Details: Übung.

$\square_{\text{Beh 1}}$

Behauptung 2:

Seien $\psi_1 := Q_1 x_1 \cdots Q_\ell x_\ell \, \chi_1$ und

$\psi_2 := Q'_1 y_1 \cdots Q'_m y_m \chi_2$, wobei

$\ell, m \geq 0$, $Q_1, \ldots, Q_\ell, Q'_1, \ldots, Q'_m \in \{\exists, \forall\}$,

$x_1, \ldots, x_\ell, y_1, \ldots, y_m \in \mathrm{Var}$, $\chi_1, \chi_2 \in \mathrm{FO}[\sigma]$.

Es gelte $\{x_1, \ldots, x_\ell\} \cap \mathrm{frei}(\psi_2) = \emptyset$ und

$\{y_1, \ldots, y_m\} \cap \mathrm{frei}(\chi_1) = \emptyset$.

Dann gilt für $* \in \{\wedge, \vee\}$, dass

$$(\psi_1 * \psi_2) \equiv Q_1 x_1 \cdots Q_\ell x_\ell \, Q'_1 y_1 \cdots Q'_1 y_m \, (\chi_1 * \chi_2).$$

Beweis von Beh 2:

Zwei Induktionen über ℓ bzw m unter Verwendung der Tatsache, dass folgendes gilt:

Ist $x \notin \mathrm{frei}(\vartheta_1)$, so gilt

1) $(\vartheta_1 \vee \exists x \vartheta_2) \equiv \exists x (\vartheta_1 \vee \vartheta_2)$

2) $(\vartheta_1 \wedge \exists x \vartheta_2) \equiv \exists x (\vartheta_1 \wedge \vartheta_2)$

3) $(\vartheta_1 \vee \forall x \vartheta_2) \equiv \forall x (\vartheta_1 \vee \vartheta_2)$

4) $(\vartheta_1 \wedge \forall x \vartheta_2) \equiv \forall x (\vartheta_1 \wedge \vartheta_2)$.

Details: Übung.

$\square$ Beh 2

Abschluss des Beweises von Satz 2.12:

Sei φ eine $FO[\sigma]$-Formel.
Gemäß Beobachtung 2.2 können wir annehmen, dass in φ keins der Symbole $\rightarrow, \leftrightarrow$ vorkommt.
Per Induktion über den Aufbau von φ zeigen wir, dass es eine zu φ äquivalente Formel φ' in Pränex-Normalform gibt mit $frei(\varphi') = frei(\varphi)$.

Induktionsanfang:

Atomare Formeln sind quantorenfrei und daher insbes. in Pränex-Normalform.

Induktionsschritt:

Fall 1: φ ist von der Form $Qx\psi$, mit $Q \in \{\exists, \forall\}$, $x \in Var$, $\psi \in FO[\sigma]$.
Gemäß Induktionsannahme gibt es eine zu ψ äquivalente Formel ψ' in Pränex-Normalform mit $frei(\psi') = frei(\psi)$.
Offensichtlich ist $\varphi' := Qx\psi'$ die gesuchte Formel in Pränex-Normalform.

Fall 2: φ ist von der Form $\neg\psi$ mit $\psi \in FO[\sigma]$.
Gemäß Induktionsannahme gibt es Formel ψ' in Pränex-Normalform mit $\psi' \equiv \psi$ und $frei(\psi') = frei(\psi)$.
Klar: $\varphi \equiv \neg\psi'$.
Gemäß Behauptung 1 gibt es eine zu $\neg\psi'$ äquivalente Formel in Pränex-Normalform.

Fall 3: φ ist von der Form $(\psi_1 * \psi_2)$ mit $* \in \{\wedge, \vee\}$ und $\psi_1, \psi_2 \in FO[\sigma]$.

Gemäß Induktionsannahme gibt es Formeln ψ_1', ψ_2' in Pränex-Normalform mit $\psi_1' \equiv \psi_1$, $\psi_2' \equiv \psi_2$ und $frei(\psi_1') = frei(\psi_1)$ und $frei(\psi_2') = frei(\psi_2)$. Klar: $\varphi \equiv (\psi_1' * \psi_2')$

Sei $Q_1 x_1 \cdots Q_\ell x_\ell \, \chi_1$ die Form von ψ_1' (mit χ_1 quantorenfrei) und sei

$Q_1' y_1 \cdots Q_m' y_m \, \chi_2$ die Form von ψ_2' (mit χ_2 quantorenfrei).

Durch konsistentes Umbenennen der in ψ_1', ψ_2' gebundenen Variablen $x_1, \dots, x_\ell, y_1, \dots, y_m$ können wir O.B.d.A. annehmen, dass $\{x_1, \dots, x_\ell\} \cap frei(\psi_2') = \emptyset$ und $\{y_1, \dots, y_m\} \cap frei(\chi_1) = \emptyset$.

Gemäß Behauptung 2 gibt es eine zu $(\psi_1' * \psi_2')$ äquivalente Formel in Pränex-Normalform.

$\square$ Satz 2.12

2.4 Termreduzierte Formeln und relationale Signaturen

Beispiel 2.14

Terme, die in einer FO[σ]-Formel vorkommen, können "ineinandergeschachtelte" Funktionssymbole enthalten.

Bsp: $\sigma = \{ \underset{2}{f}, \underset{1}{g} \}$,

$$\varphi := \forall x \, \exists y \; f(x, g(y)) = x$$

φ enthält hier den "geschachtelten" Term $f(x, g(y))$.

Man sieht leicht, dass φ äquivalent ist zur Formel

$$\hat{\varphi} := \forall x \, \exists y \, \exists z \, \big(g(y) = z \wedge f(x,z) = x \big),$$

in der keine "geschachtelten" Terme vorkommen.

Definition 2.15:

Eine FO[σ]-Formel heißt termreduziert, wenn all ihre atomaren Teilformeln von der Form

- $R(x_1, \dots, x_r)$, mit $R \in \sigma$, $r = ar(R)$, $x_1, \dots, x_r \in Var$,
- $f(x_1, \dots, x_k) = y$, mit $f \in \sigma$, $k = ar(f)$, $x_1, \dots, x_k, y \in Var$ oder
- $x = c$, mit $x \in Var$, $c \in \sigma$
- $x = y$, mit $x, y \in Var$

sind.

Satz 2.16

Jede $FO[\sigma]$-Formel φ ist äquivalent zu einer termreduzierten $FO[\sigma]$-Formel φ' mit $frei(\varphi') = frei(\varphi)$.

Beweis: Per Induktion über den Aufbau von Formeln ordnen wir jeder $FO[\sigma]$-Formel φ eine äquivalente termreduzierte Formel φ' zu.

Für gegebenes $\varphi \in FO[\sigma]$ sei $x_1, x_2, x_3, \ldots$ die Auflistung aller nicht in φ vorkommenden Variablen aus Var (in der durch $v_0, v_1, v_2, \ldots$ induzierten Reihenfolge).

Fall 1: φ ist von der Form $t = x$, mit $x \in Var$, $t \in T_\sigma$.

φ' wird induktiv über den Aufbau von t wie folgt definiert:

- Ist t von der Form y, mit $y \in Var$, so

  $\varphi' := \varphi$ (φ ist von der Form $y = x$)

- Ist t von der Form c, mit $c \in \sigma$, so

  $\varphi' := x = c$ (φ ist von der Form $c = x$)

- Ist t von der Form $f(t_1, \ldots, t_k)$ mit $f \in \sigma$, $k = ar(f)$, $t_1, \ldots, t_k \in T_\sigma$, so

  $$\varphi' := \exists x_1 \cdots \exists x_k \left(f(x_1, \ldots, x_k) = x \wedge [t_1 = x_1]' \wedge \cdots \wedge [t_k = x_k]' \right)$$

  (φ ist von der Form $f(t_1, \ldots, t_k) = x$)

Fall 2: φ ist von der Form $t_1 = t_2$, wobei $t_1, t_2 \in T_\sigma$ und t_2 keine Variable. Dann setze

$$\varphi' := \exists x_1 \left([t_1 = x_1]' \wedge [t_2 = x_1]' \right).$$

Fall 3: φ ist von der Form $R(t_1, \dots, t_r)$ mit $R \in \sigma$, $r = ar(R)$, $t_1, \dots, t_r \in T_\sigma$. Dann setze

$$\varphi' := \exists x_1 \cdots \exists x_r \left(R(x_1, \dots, x_r) \wedge [t_1 = x_1]' \wedge \dots \wedge [t_r = x_r]' \right)$$

Fall 4: φ ist von der Form $\neg\psi$ mit $\psi \in FO[\sigma]$.

Dann setze $\varphi' := \neg\psi'$.

Fall 5: φ ist von der Form $(\psi_1 * \psi_2)$ mit $\psi_1, \psi_2 \in FO[\sigma]$ und $* \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$. Dann setze

$$\varphi' := (\psi_1' * \psi_2')$$

Fall 6: φ ist von der Form $Qx\psi$ mit $Q \in \{\exists, \forall\}$, $x \in Var$, $\psi \in FO[\sigma]$. Dann setze

$$\varphi' := Qx\psi'.$$

Man sieht leicht, dass in jedem der oben angegebenen Fälle gilt: $\varphi' \equiv \varphi$, φ' ist termreduziert und $frei(\varphi') = frei(\varphi)$.

$\square$

Definition 2.17

Eine Signatur heißt <u>relational</u>, wenn sie kein(e) Funktionssymbol(e) und kein(e) Konstantensymbol(e) enthält.

Manchmal (z.B. in Kapitel 3 und 4) ist es vorteilhaft, sich auf <u>relationale</u> Signaturen zu beschränken. Im Folgenden zeigen wir, dass dies keine wirkliche Einschränkung ist, da man Funktionen und Konstanten durch geeignete Relationen repräsentieren kann.

Definition 2.18

(a) Jeder Signatur σ ordnen wir eine <u>relationale</u> Signatur σ_{rel} wie folgt zu:

$$\sigma_{rel} := \{ R : R \in \sigma \text{ ist ein Relationssymbol} \}$$
$$\dot\cup \{ R_f : f \in \sigma \text{ ist ein Funktionssymbol} \}$$
$$\dot\cup \{ R_c : c \in \sigma \text{ ist ein Konstantensymbol} \}$$

Für jedes $c \in \sigma$ ist dabei R_c ein 1-stelliges Relationssymbol; für jedes $f \in \sigma$ mit $k := ar(f)$ ist R_f ein

Relationssymbol der Stelligkeit $k+1$.

(b) Jeder σ-Struktur $\mathfrak{A}$ ordnen wir eine σ_{rel}-Struktur $\mathfrak{A}_{rel}$ wie folgt zu:

- $\mathfrak{A}_{rel}$ hat dasselbe Universum wie $\mathfrak{A}$, d.h. $A_{rel} = A$
- $\mathfrak{A}_{rel}$ stimmt mit $\mathfrak{A}$ auf den Relationssymbolen aus σ überein, d.h. für jedes Relationssymbol $R \in \sigma$ gilt $R^{\mathfrak{A}_{rel}} := R^{\mathfrak{A}}$
- für jedes Funktionssymbol $f \in \sigma$ mit $k := ar(f)$ ist $R_f^{\mathfrak{A}_{rel}}$ der Graph der Funktion $f^{\mathfrak{A}}$, d.h.
$$R_f^{\mathfrak{A}_{rel}} := \left\{ (a_1, \dots, a_k, b) \in A_{rel}^{k+1} : f^{\mathfrak{A}}(a_1, \dots, a_k) = b \right\}$$
- für jedes Konstantensymbol $c \in \sigma$ ist $R_c^{\mathfrak{A}_{rel}}$ die 1-stellige Relation, die nur das Element $c^{\mathfrak{A}}$ enthält, d.h. $R_c^{\mathfrak{A}_{rel}} := \{ c^{\mathfrak{A}} \}$.

Der folgende Satz besagt anschaulich, dass $\mathrm{FO}[\sigma]$-Formeln genau dieselben Aussagen über σ-Interpretationen machen können, wie $\mathrm{FO}[\sigma_{rel}]$-Formeln über die entsprechenden σ_{rel}-Interpretationen.

Satz 2.19

(a) Zu jeder FO[σ]-Formel φ gibt es eine FO[σ_{rel}]-Formel $\hat{\varphi}$, so dass für alle zu φ passenden σ-Interpretationen $(\mathfrak{A}, \beta)$ gilt:

$$(\mathfrak{A}, \beta) \models \varphi \iff (\mathfrak{A}_{rel}, \beta) \models \hat{\varphi}$$

(b) Zu jeder FO[σ_{rel}]-Formel φ gibt es eine FO[σ]-Formel $\hat{\varphi}$, so dass für alle zu $\hat{\varphi}$ passenden σ-Interpretationen $(\mathfrak{A}, \beta)$ gilt.

$$(\mathfrak{A}_{rel}, \beta) \models \varphi \iff (\mathfrak{A}, \beta) \models \hat{\varphi}.$$

Beweis:

(a) Gemäß Satz 2.16 genügt es, $\hat{\varphi}$ für termreduzierte FO[σ]-Formeln φ anzugeben.

Wir tun dies induktiv über den Aufbau von termreduzierten FO[σ]-Formeln φ:

Fall 1: φ ist von der Form $R(y_1, \dots, y_r)$ mit $R \in \sigma$, $r = ar(R)$, $y_1, \dots, y_r \in Var$.

Dann $\hat{\varphi} := \varphi$.

Fall 2: φ ist von der Form $f(x_1,\ldots,x_k)=y$ mit $f\in\sigma$, $k=ar(f)$, $x_1,\ldots,x_k,y\in Var$.

Dann $\hat{\varphi} := R_f(x_1,\ldots,x_k,y)$

Fall 3: φ ist von der Form $x=c$ mit $x\in Var$, $c\in\sigma$.

Dann $\hat{\varphi} := R_c(x)$

Fall 4: φ ist von der Form $x=y$ mit $x,y\in Var$

Dann $\hat{\varphi} := \varphi$.

Fall 5: φ ist von der Form $\neg\psi$ mit $\psi\in FO[\sigma]$, ψ termreduziert. Dann $\hat{\varphi} := \neg\hat{\psi}$.

Fall 6: φ ist von der Form $(\psi_1 * \psi_2)$ mit $\psi_1,\psi_2\in FO[\sigma]$, ψ_1,ψ_2 termreduziert, $*\in\{\wedge,\vee,\rightarrow,\leftrightarrow\}$. Dann

$\hat{\varphi} := (\hat{\psi}_1 * \hat{\psi}_2)$

Fall 7: φ ist von der Form $Qx\psi$ mit $Q\in\{\exists,\forall\}$, $x\in Var$, $\psi\in FO[\sigma]$, ψ termreduziert. Dann

$\hat{\varphi} := Qx\hat{\psi}$

Man sieht leicht, dass in jedem der oben angegebenen Fälle für jede zu φ passende σ-Interpretation $(\mathcal{A},\beta)$ gilt:

$$(\mathfrak{A}, \beta) \models \varphi \quad \Leftrightarrow \quad (\mathfrak{A}_{rel}, \beta) \models \hat{\varphi}$$

(b): Zum Beweis von (b) können wir ähnlich wie in (a) verfahren, wobei wir an Stelle von Fall 2 und Fall 3 folgendermaßen vorgehen:

Fall 2': φ ist von der Form $R_f(t_1, \dots, t_k, t_{k+1})$ mit $k+1 = ar(R_f)$, $t_1, \dots, t_{k+1} \in T_{\sigma_{rel}}$. Dann

$$\hat{\varphi} := f(t_1, \dots, t_k) = t_{k+1}$$

Fall 3': φ ist von der Form $R_c(t)$ mit $t \in T_{\sigma_{rel}}$.

Dann $\hat{\varphi} := t = c$.

Rest: Übung. $\square$