1 Syntax und Semantik der Logik erster Stufe

Die Logik erster Stufe (Prädikatenlogik) besitzt eine

- **Syntax**, die festlegt, welche Zeichenketten Formeln der Logik erster Stufe sind, und eine
- **Semantik**, die festlegt, welche "Bedeutung" einzelne Formeln haben.

Die Logik erster Stufe beschäftigt sich mit Objekten und Aussagen über deren Eigenschaften. Vor der Einführung von Syntax und Semantik der Logik erster Stufe wenden wir uns zunächst den Objekten zu, über die Formeln der Logik erster Stufe "reden" können.

1.1 Strukturen

Die Objekte, über die Formeln der Logik erster Stufe Aussagen treffen können, heißen **Strukturen**. Viele Objekte lassen sich auf natürliche Weise durch solche Strukturen repräsentieren, beispielsweise

- Graphen $G = (V, E)$ oder Bäume $B = (V, E)$,
- die natürlichen Zahlen mit Addition und Multiplikation, $(\mathbb{N}, +, \times)$,
- die reellen Zahlen mit Addition, Multiplikation und Konstanten 0 und 1, $(\mathbb{R}, +, \times, 0, 1)$,
- Datenbanken.

Die im Folgenden definierten **Signaturen** legen den "Typ" (bzw. das "Format") der entsprechenden Strukturen fest.

Definition 1.1.
Eine **Signatur** (auch **Symbolmenge** bzw. **Vokabular**) ist eine Menge σ von Relationssymbolen, Funktionssymbolen und/oder Konstantensymbolen. Jedes Relationssymbol $R \in \sigma$ und jedes Funktionssymbol $f \in \sigma$ hat eine **Stelligkeit** (bzw. **Arität**, engl. arity)

Signatur, Vokabular
Stelligkeit
$\mathrm{ar}(R)$, $\mathrm{ar}(f)$

$$\mathrm{ar}(R) \in \mathbb{N}_{>0} \qquad \text{bzw.} \qquad \mathrm{ar}(f) \in \mathbb{N}_{>0}.$$

(Notation: $\mathbb{N} := \{0, 1, 2, 3, \dots\}$; $\mathbb{N}_{>0} := \mathbb{N} \setminus \{0\}$)

$\mathbb{N}$, $\mathbb{N}_{>0}$

Notation 1.2.

- Der griechische Buchstabe σ bezeichnet in diesem Vorlesungsskript stets eine Signatur.
- Für Relationssymbole verwenden wir normalerweise Großbuchstaben wie $R, P, E, Q, R_1, R_2, \dots$.
- Für Funktionssymbole verwenden wir meistens Kleinbuchstaben wie $f, g, h, f_1, f_2, \dots$.

- Für Konstantensymbole verwenden wir meistens Kleinbuchstaben wie $c, d, c_1, c_2, \ldots$.
- Gelegentlich verwenden wir als Relations- und Funktionssymbole auch Zeichen wie $\leq$ (2-stelliges Relationssymbol) bzw. $+, \times$ (2-stellige Funktionssymbole), und als Konstantensymbole Zahlen wie 0, 1.
- Die Stelligkeit eines Relations- oder Funktionssymbols deuten wir häufig an, indem wir sie unter das Symbol schreiben.

  Beispiel: Die Notation $\underset{2}{R}$ deutet an, dass R ein 2-stelliges Relationssymbol ist.

Definition 1.3.

σ-Struktur

Eine **σ-Struktur** (bzw. Struktur über σ) ist ein Paar $\mathfrak{A} = (A, \alpha)$, bestehend aus

Universum

- einer nicht-leeren Menge A, dem so genannten **Universum** (bzw. Träger, Grundbereich; engl. domain) von $\mathfrak{A}$ und
- einer auf σ definierten Abbildung α, die
  - jedem Relationssymbol $R \in \sigma$ eine Relation $\alpha(R) \subseteq A^{\mathrm{ar}(R)}$ der Stelligkeit $\mathrm{ar}(R)$ zuordnet,
  - jedem Funktionssymbol $f \in \sigma$ eine Funktion $\alpha(f) : A^{\mathrm{ar}(f)} \to A$ zuordnet und
  - jedem Konstantensymbol $c \in \sigma$ ein Element $\alpha(c) \in A$ zuordnet.

Notation 1.4.

- Strukturen bezeichnen wir meistens mit Fraktur-Buchstaben $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{G}, \ldots$; das Universum der Strukturen durch die entsprechenden lateinischen Buchstaben $A, B, G, \ldots$.
- Ist $\mathfrak{A} = (A, \alpha)$ eine σ-Struktur, so schreiben wir für jedes Symbol $S \in \sigma$ oft $S^{\mathfrak{A}}$ an Stelle von $\alpha(S)$. An Stelle von $\mathfrak{A} = (A, \alpha)$ schreiben wir oft auch $\mathfrak{A} = (A, (S^{\mathfrak{A}})_{S \in \sigma})$. Falls σ endlich und von der Form

$$\sigma = \{ R_1, \ldots R_k, f_1, \ldots, f_\ell, c_1, \ldots, c_m \}$$

  ist, so schreiben wir auch

$$\mathfrak{A} = \left(A, R_1^{\mathfrak{A}}, \ldots R_k^{\mathfrak{A}}, f_1^{\mathfrak{A}}, \ldots, f_\ell^{\mathfrak{A}}, c_1^{\mathfrak{A}}, \ldots, c_m^{\mathfrak{A}} \right),$$

  um eine σ-Struktur $\mathfrak{A}$ zu bezeichnen.

Beispiel 1.5 (Arithmetische Strukturen)**.**
Sei $\sigma_{\mathrm{Ar}} := \{ \leq, +, \times, 0, 1 \}$, wobei $\leq$ ein 2-stelliges Relationssymbol, $+, \times$ zwei 2-stellige Funktionssymbole und $0, 1$ zwei Konstantensymbole sind.

Standardmodell der Arithmetik, $\mathcal{N}$

(a) Das **Standardmodell der Arithmetik** ist die σ_{Ar}-Struktur

$$\mathcal{N} := (\mathbb{N}, \leq^{\mathcal{N}}, +^{\mathcal{N}}, \times^{\mathcal{N}}, 0^{\mathcal{N}}, 1^{\mathcal{N}}),$$

wobei $\leq^{\mathcal{N}}$ die natürliche lineare Ordnung auf $\mathbb{N}$ ist, $+^{\mathcal{N}}$ und $\times^{\mathcal{N}}$ die Addition bzw. die Multiplikation auf $\mathbb{N}$ sind und $0^{\mathcal{N}}$ bzw. $1^{\mathcal{N}}$ die Zahlen 0 bzw. 1 sind.

$\mathcal{Z}$, $\mathcal{Q}$, $\mathcal{R}$

(b) Entsprechend können wir σ_{Ar}-Strukturen $\mathcal{Z}$, $\mathcal{Q}$, $\mathcal{R}$ mit Universum $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ definieren.

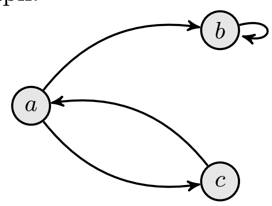
Beispiel 1.6 (Graphen und Bäume).
Sei $\sigma_{\text{Graph}} := \{ E \}$, wobei E ein 2-stelliges Relationssymbol ist. Jeder gerichtete Graph bzw. gerichtete Baum (V, E) (V: Knotenmenge, $E \subseteq V \times V$: Kantenmenge) lässt sich als σ_{Graph}-Struktur $\mathfrak{A} = (A, E^{\mathfrak{A}})$ mit

- Universum $A := V$ und
- Relation $E^{\mathfrak{A}} := E$

auffassen.

Beispiel:

Graph:



zugehörige σ_{Graph}-Struktur:

$\mathfrak{A} = (A, E^{\mathfrak{A}})$ mit

- $A = \{ a, b, c \}$
- $E^{\mathfrak{A}} = \{ (a,b), (b,b), (a,c), (c,a) \}$

Beispiel 1.7 (Verwandtschaftsbeziehungen).
Um Verwandtschaftsbeziehungen zu modellieren, können wir die Signatur σ benutzen, die aus folgenden Symbolen besteht:

- 1-stellige Funktionssymbole *Vater*, *Mutter* (Bedeutung: $\mathit{Vater}^{\mathfrak{A}}(a)$ bezeichnet den Vater von Person a, $\mathit{Mutter}^{\mathfrak{A}}(a)$ bezeichnet die Mutter von Person a).
- 2-stellige Relationssymbole *Geschwister*, *Vorfahr* (Bedeutung: $(a,b) \in \mathit{Geschwister}^{\mathfrak{A}}$ besagt, dass a und b Geschwister sind; $\mathit{Vorfahr}^{\mathfrak{A}}(a,b)$ besagt, dass a ein Vorfahr von b ist).

Frage: Wann sind zwei Strukturen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ "prinzipiell gleich" (Fachbegriff: isomorph)?

Antwort: Falls $\mathfrak{B}$ aus $\mathfrak{A}$ entsteht, indem man die Elemente des Universums von $\mathfrak{A}$ umbenennt. Analog zum Begriff der Isomorphie von Graphen wird dies durch folgende Definition präzisiert:

Definition 1.8.
Seien $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ σ-Strukturen. Ein **Isomorphismus** von $\mathfrak{A}$ nach $\mathfrak{B}$ ist eine Abbildung $\pi : A \to B$ mit folgenden Eigenschaften: Isomorphismus

(a) π ist bijektiv.

(b) Für alle Relationssymbole $R \in \sigma$, für $k := \text{ar}(R)$ und alle k-Tupel $(a_1, \dots, a_k) \in A^k$ gilt:

$$(a_1, \dots, a_k) \in R^{\mathfrak{A}} \iff \big(\pi(a_1), \dots, \pi(a_k)\big) \in R^{\mathfrak{B}}.$$

(c) Für alle Funktionssymbole $f \in \sigma$, für $k := \text{ar}(f)$ und alle k-Tupel $(a_1, \dots, a_k) \in A^k$ gilt:

$$\pi\left(f^{\mathfrak{A}}(a_1, \dots, a_k)\right) = f^{\mathfrak{B}}\big(\pi(a_1), \dots, \pi(a_k)\big).$$

(d) Für jedes Konstantensymbol $c \in \sigma$ gilt:

$$\pi\left(c^{\mathfrak{A}}\right) = c^{\mathfrak{B}}.$$

Notation:

$\pi : \mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$

Seien $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ σ-Strukturen. Wir schreiben $\pi : \mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$ um anzudeuten, dass π ein Isomorphismus von $\mathfrak{A}$ nach $\mathfrak{B}$ ist.

Lemma 1.9.
Seien $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ σ-Strukturen und sei $\pi : \mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$. Dann gilt für die Umkehrabbildung π^{-1}, dass $\pi^{-1} : \mathfrak{B} \cong \mathfrak{A}$.

Beweis: einfaches Nachrechnen (Übung). □

Definition 1.10.

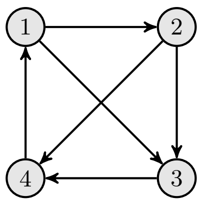
isomorph

$\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$

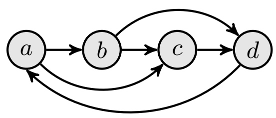
Zwei σ-Strukturen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ sind **isomorph** (kurz: $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$), wenn es einen Isomorphismus π von $\mathfrak{A}$ nach $\mathfrak{B}$ gibt.

Beispiel 1.11.

(a) Die beiden Graphen

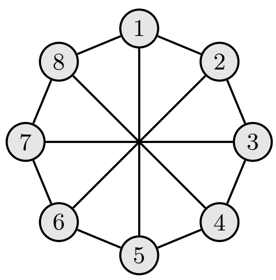


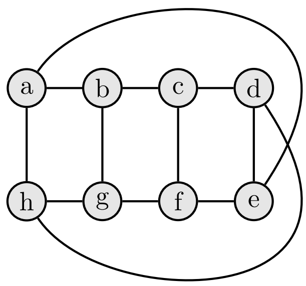
und



sind isomorph via $\pi : \{1, 2, 3, 4\} \to \{a, b, c, d\}$ mit $\pi(1) = a$, $\pi(2) = b$, $\pi(3) = c$, $\pi(4) = d$.

(b) Die beiden Graphen

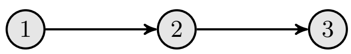




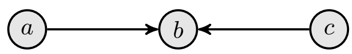
sind isomorph via $\pi : \{1, \ldots, 8\} \to \{a, \ldots, h\}$ mit

v	1	2	3	4	5	6	7	8
$\pi(v)$	a	b	c	d	h	g	f	e

(c) Die beiden Graphen



und



sind nicht isomorph.

(d) Sei $\sigma = \{f, c\}$, wobei f ein 2-stelliges Funktionssymbol und c ein Konstantensymbol ist. Sei $\mathfrak{A} = \left(A, f^{\mathfrak{A}}, c^{\mathfrak{A}}\right)$ mit

- $A := \mathbb{N}$,

- $f^{\mathfrak{A}} \ := \ +^{\mathcal{N}}$ (die Addition auf $\mathbb{N}$),
- $c^{\mathfrak{A}} \ := \ 0^{\mathcal{N}}$ (die natürliche Zahl 0),

und sei $\mathfrak{B} = \left(B, f^{\mathfrak{B}}, c^{\mathfrak{B}}\right)$ mit

- $B \ := \ \{\, 2^n : n \in \mathbb{N} \,\}$ (die Menge aller Zweierpotenzen),
- $f^{\mathfrak{B}} : B \times B \to B$ die Funktion mit

$$f^{\mathfrak{B}}(b_1, b_2) \ = \ b_1 \cdot b_2 \quad \text{(f.a. } b_1, b_2 \in B\text{)},$$

- $c^{\mathfrak{B}} \ := \ 1 = 2^0 \ \in \ B.$

Dann gilt $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$, und die Abbildung $\pi\colon A \to B$ mit $\pi(n) := 2^n$ f.a. $n \in \mathbb{N}$ ist ein Isomorphismus von $\mathfrak{A}$ nach $\mathfrak{B}$, denn:

- π ist eine bijektive Abbildung von A nach B.
- Für das Konstantensymbol c gilt

$$\pi\left(c^{\mathfrak{A}}\right) \ \stackrel{\text{Def. } c^{\mathfrak{A}}}{=} \ \pi(0) \ \stackrel{\text{Def. } \pi}{=} \ 2^0 \ = \ 1 \ \stackrel{\text{Def. } c^{\mathfrak{B}}}{=} \ c^{\mathfrak{B}}.$$

- Für das Funktionssymbol f und alle $(a_1, a_2) \in A^2$ gilt:

$$\pi\left(f^{\mathfrak{A}}(a_1, a_2)\right) \ \stackrel{\text{Def. } f^{\mathfrak{A}}}{=} \ \pi(a_1 + a_2) \ \stackrel{\text{Def. } \pi}{=} \ 2^{a_1 + a_2}$$

und

$$f^{\mathfrak{B}}\left(\pi(a_1), \pi(a_2)\right) \ \stackrel{\text{Def. } \pi}{=} \ f^{\mathfrak{B}}\left(2^{a_1}, 2^{a_2}\right) \ \stackrel{\text{Def. } f^{\mathfrak{B}}}{=} \ 2^{a_1} \cdot 2^{a_2} \ = \ 2^{a_1 + a_2}.$$

Also: $\pi\left(f^{\mathfrak{A}}(a_1, a_2)\right) = f^{\mathfrak{B}}\left(\pi(a_1), \pi(a_2)\right)$.

Somit ist π ein Isomorphismus von $\mathfrak{A}$ nach $\mathfrak{B}$.

Satz 1.12.
*Isomorphie ($\cong$) ist eine **Äquivalenzrelation** auf der Klasse aller σ-Strukturen, d.h. für alle σ-Strukturen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}$ gilt:*

(a) $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{A}$ *(Reflexivität).*

(b) Falls $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$*, so auch* $\mathfrak{B} \cong \mathfrak{A}$ *(Symmetrie).*

(c) Falls $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$ *und* $\mathfrak{B} \cong \mathfrak{C}$*, so auch* $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{C}$ *(Transitivität).*

Beweis: Übung. □

1.2 Syntax der Logik erster Stufe

Bestandteile:

- aussagenlogische Junktoren

$\neg$,	$\wedge$,	$\vee$,	$\rightarrow$,	$\leftrightarrow$
„nicht“	„und“	„oder“	„wenn ..., dann“	„genau dann, wenn“

- Variablen $v_0, v_1, v_2, \ldots$ um Elemente aus dem Universum einer Struktur zu bezeichnen
- Quantoren: $\exists$ (“es existiert”), $\forall$ (“für alle”)

- Symbole für Elemente aus der Signatur σ

Präzise:

Definition 1.13 (Variablen und Alphabet der Logik erster Stufe).

Variable
Var

(a) Eine **Individuenvariable** (kurz: **Variable**) hat die Form v_i, für $i \in \mathbb{N}$.
Die Menge aller Variablen bezeichnen wir mit Var. D.h.

$$\text{Var} \ := \ \{ v_i : i \in \mathbb{N} \} \ = \ \{ v_0, v_1, v_2, v_3, \dots \}.$$

A_σ

(b) Sei σ eine Signatur. Das Alphabet A_σ der Logik erster Stufe über σ besteht aus

- den Variablen in Var
- den Symbolen in σ
- den Quantoren $\exists$ (Existenzquantor) und $\forall$ (Allquantor)
- dem Gleichheitssymbol[1] $=$
- den Junktoren $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$
- den Klammern (,)
- dem Komma ,

Existenzquantor
Allquantor

D.h.:

$$A_\sigma \ = \ \text{Var} \cup \sigma \cup \{ \exists, \forall \} \cup \{ = \} \cup \{ \neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow \} \cup \{ (,) \} \cup \{ , \}.$$

Notation:

A_σ^*

A_σ^* bezeichnet die Menge aller endlichen Zeichenketten über A_σ.

Definition 1.14 (Terme der Logik erster Stufe).

T_σ
σ-Terme

Sei σ eine Signatur. Die Menge T_σ aller **σ-Terme** ist die folgendermaßen rekursiv definierte Teilmenge von A_σ^*:

- Für jedes Konstantensymbol $c \in \sigma$ ist $c \in T_\sigma$.
- Für jede Variable $x \in \text{Var}$ ist $x \in T_\sigma$.
- Für jedes $k \in \mathbb{N}_{>0}$ und jedes k-stellige Funktionssymbol $f \in \sigma$ gilt:
  Sind $t_1 \in T_\sigma, \dots, t_k \in T_\sigma$, so ist auch $f(t_1, \dots, t_k) \in T_\sigma$.

Beispiel 1.15.
Sei $\sigma = \{ \underset{2}{f}, c \}$ wie in Beispiel 1.11(d) gewählt. Folgende Worte sind σ-Terme:

- c
- v_4
- $f(c, c)$
- $f(c, v_0)$
- $f(c, f(v_1, v_3))$

Folgende Worte sind keine σ-Terme:

[1] Manche Bücher schreiben $\equiv$ an Stelle von $=$

- 0
- $f(d,d)$
- $f(v_0, c, v_1)$
- $f^{\mathfrak{A}}(2,3)$

Definition 1.16 (Formeln der Logik erster Stufe)**.**
Sei σ eine Signatur. Die Menge **FO**$[\sigma]$ aller Formeln der Logik erster Stufe über der Signatur σ (kurz: **FO**$[\sigma]$**-Formeln**; FO steht für die englische Bezeichnung **first-order logic**) ist die folgendermaßen rekursiv definierte Teilmenge von A_σ^*:

FO$[\sigma]$
FO$[\sigma]$-Formeln

(a) Für alle σ-Terme t_1 und t_2 gilt
$$t_1 = t_2 \ \in \ \text{FO}[\sigma].$$

(b) Für jedes Relationssymbol $R \in \sigma$, für $k := \text{ar}(R)$ und für alle σ-Terme $t_1, \dots, t_k$ gilt:
$$R(t_1 \dots t_k) \ \in \ \text{FO}[\sigma].$$

(c) Ist $\varphi \in \text{FO}[\sigma]$, so auch $\neg\varphi \ \in \ \text{FO}[\sigma]$.

(d) Ist $\varphi \in \text{FO}[\sigma]$ und $\psi \in \text{FO}[\sigma]$, so ist auch
  - $(\varphi \wedge \psi) \ \in \ \text{FO}[\sigma]$,
  - $(\varphi \vee \psi) \ \in \ \text{FO}[\sigma]$,
  - $(\varphi \rightarrow \psi) \ \in \ \text{FO}[\sigma]$,
  - $(\varphi \leftrightarrow \psi) \ \in \ \text{FO}[\sigma]$.

(e) Ist $\varphi \in \text{FO}[\sigma]$ und ist $x \in \text{Var}$, so ist auch
  - $\exists x\ \varphi \ \in \ \text{FO}[\sigma]$,
  - $\forall x\ \varphi \ \in \ \text{FO}[\sigma]$.

Bemerkung:

- FO$[\sigma]$-Formeln der Form $t_1 = t_2$ bzw. $R(t_1 \dots t_k)$ heißen auch **atomare** Formeln.

atomare Formeln

- In manchen Büchern wird FO$[\sigma]$ auch mit L_σ bzw. L^σ bezeichnet, und FO$[\sigma]$-Formeln werden auch σ-Ausdrücke genannt.

Beispiel 1.17.

(a) Sei $\sigma = \{\underset{2}{f}, c\}$. Folgende Worte sind FO$[\sigma]$-Formeln:
  - $f(v_0, v_1) = c$
  - $\forall v_2\ f(v_2, c) = v_2$
  - $\neg\, \exists v_3\ (f(v_2, v_3) = v_3 \ \wedge \ \neg\, v_3 = c)$

  Folgende Worte sind keine FO$[\sigma]$-Formeln:
  - $(f(v_0, v_1) = c)$
  - $f(v_0, v_1)$ (... ist ein σ-Term, aber keine FO$[\sigma]$-Formel)
  - $(\forall v_2\ (f(v_2, c) = v_2))$
  - $\exists c\ f(v_0, c) = v_0$

(b) Sei $\sigma_{\text{Graph}} = \{ \underset{2}{E} \}$. Folgendes ist eine FO[$\sigma_{\text{Graph}}$]-Formel:

$$\forall v_0 \, \forall v_1 \, \Big(\big(E(v_0, v_1) \wedge E(v_1, v_0) \big) \; \rightarrow \; v_0 = v_1 \Big)$$

Intuition zur Semantik (die formale Definition der Semantik wird in Abschnitt 1.3 gegeben):

In einem Graphen $\mathfrak{A} = \big(A, E^{\mathfrak{A}} \big)$ sagt die Formel

$$\forall v_0 \, \forall v_1 \, \Big(\big(E(v_0, v_1) \wedge E(v_1, v_0) \big) \; \rightarrow \; v_0 = v_1 \Big)$$

folgendes aus:

„Für alle Knoten $a_0 \in A$ und für alle Knoten $a_1 \in A$ gilt:
Falls $(a_0, a_1) \in E^{\mathfrak{A}}$ und $(a_1, a_0) \in E^{\mathfrak{A}}$, so ist $a_0 = a_1$."

Die Formel sagt in einem Graphen $\mathfrak{A} = \big(A, E^{\mathfrak{A}} \big)$ also gerade aus, dass die Kantenrelation „antisymmetrisch" ist. D.h. ein Graph $\mathfrak{A} = \big(A, E^{\mathfrak{A}} \big)$ **erfüllt** die Formel genau dann, wenn die Kantenrelation $E^{\mathfrak{A}}$ antisymmetrisch ist.

Notation 1.18.

- Statt mit $v_0, v_1, v_2, \ldots$ bezeichnen wir Variablen oft auch mit $x, y, z, x_1, x_2, \ldots$.

- Formeln bezeichnen wir meistens mit griechischen Kleinbuchstaben $\varphi, \psi, \chi, \ldots$.
Formelmengen Formel**mengen** mit griechischen Großbuchstaben $\Phi, \Psi, \ldots$.

Bindungsregeln
- Bezüglich Klammerung verwenden wir folgende Bindungsregeln:
  (a) $\neg$ bindet stärker als alle anderen Junktoren.
  (b) $\wedge$ und $\vee$ binden stärker als $\rightarrow$ und $\leftrightarrow$.

- Die äußeren Klammern einer Formel lassen wir manchmal weg.
(D. h. wir schreiben z. B. $\varphi \wedge \psi \;\rightarrow\; \chi$ an Stelle von $((\varphi \wedge \psi) \;\rightarrow\; \chi))$).

Infixschreibweise
- Für gewisse 2-stellige Funktionssymbole wie $+, \times \in \sigma_{\text{Ar}}$ und gewisse 2-stellige Relationssymbole wie $\leq$ verwenden wir **Infix- statt Präfixschreibweise** und setzen Klammern dabei auf natürliche Weise, um die eindeutige Lesbarkeit zu gewährleisten.

  Beispiel:
  - An Stelle des (formal korrekten Terms) $\times(+(v_1, v_2), v_2)$ schreiben wir $(v_1 + v_2) \times v_2$.
  - An Stelle der (formal korrekten) atomaren Formel $\leq (v_1, v_2)$ schreiben wir $v_1 \leq v_2$.

- Zur besseren Lesbarkeit von Termen und atomaren Formeln schreiben wir manchmal
  - $Rt_1 \ldots t_k$ an Stelle des (formal korrekten) $R(t_1, \ldots, t_k)$,
  - $ft_1 \ldots t_k$ an Stelle des (formal korrekten) $f(t_1, \ldots, t_k)$.

1.3 Semantik der Logik erster Stufe

Um die formale Definition der Semantik der Logik erster Stufe angeben zu können, benötigen wir noch folgende Notationen:

Definition 1.19 (Subformeln bzw. Teilformeln).
Für jede FO[σ]-Formel φ definieren wir die Menge $\mathrm{sub}(\varphi) \subseteq \mathrm{FO}[\sigma]$ aller **Subformeln** (oder: **Teilformeln**) von φ wie folgt:

sub(φ)
Subformeln
Teilformeln

- Ist φ eine atomare σ-Formel, so $\mathrm{sub}(\varphi) := \{ \varphi \}$.
- Ist φ von der Form $\neg\psi$ für eine FO[σ]-Formel ψ, so ist $\mathrm{sub}(\varphi) := \{ \varphi \} \cup \mathrm{sub}(\psi)$.
- Ist φ von der Form $(\psi_1 * \psi_2)$ für $* \in \{ \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow \}$ und FO[σ]-Formeln ψ_1 und ψ_2, so $\mathrm{sub}(\varphi) := \{ \varphi \} \cup \mathrm{sub}(\psi_1) \cup \mathrm{sub}(\psi_2)$.
- Ist φ von der Form $Qx\ \psi$ für $Q \in \{ \exists, \forall \}, x \in \mathrm{Var}$ und $\psi \in \mathrm{FO}[\sigma]$, so ist
$$\mathrm{sub}(\varphi) := \{ \varphi \} \cup \mathrm{sub}(\psi).$$

Beispiel:

$$\begin{aligned}
\mathrm{sub}\Big(\forall v_0 \forall v_1 \Big(\big(E(v_0,v_1) \wedge E(v_1,v_0)\big) \rightarrow v_0 = v_1 \Big) \Big) = \\
\Big\{ & \forall v_0 \forall v_1 \Big(\big(E(v_0,v_1) \wedge E(v_1,v_0)\big) \rightarrow v_0 = v_1 \Big), \\
& \forall v_1 \Big(\big(E(v_0,v_1) \wedge E(v_1,v_0)\big) \rightarrow v_0 = v_1 \Big), \\
& \Big(\big(E(v_0,v_1) \wedge E(v_1,v_0)\big) \rightarrow v_0 = v_1 \Big), \\
& \big(E(v_0,v_1) \wedge E(v_1,v_0)\big), \\
& v_0 = v_1, \\
& E(v_0,v_1), \\
& E(v_1,v_0) \Big\}
\end{aligned}$$

Definition 1.20 (Variablen in Termen).
Für jeden σ-Term $t \in T_\sigma$ definieren wir die Menge $\mathrm{var}(t) \subseteq \mathrm{Var}$ der **Variablen von** t wie folgt:

var(t)

- Für $x \in \mathrm{Var}$ ist $\mathrm{var}(x) := \{ x \}$.
- Für jedes Konstantensymbol $c \in \sigma$ ist $\mathrm{var}(c) := \emptyset$.
- Ist $t \in T_\sigma$ von der Form $f(t_1, \ldots, t_k)$, wobei $f \in \sigma$ ein k-stelliges Funktionssymbol ist und $t_1, \ldots, t_k \in T_\sigma$, so ist $\mathrm{var}(t) := \mathrm{var}(t_1) \cup \cdots \cup \mathrm{var}(t_k)$.

Definition 1.21 (Freie Variablen in Formeln).
Für jede FO[σ]-Formel φ definieren wir die Menge $\mathrm{frei}(\varphi) \subseteq \mathrm{Var}$ aller **freien Variablen von** φ wie folgt:

frei(φ)
Freie Variablen

- Ist φ von der Form $t_1 = t_2$ mit $t_1, t_2 \in T_\sigma$, so ist
$$\mathrm{frei}(\varphi) := \mathrm{var}(t_1) \cup \mathrm{var}(t_2).$$

- Ist φ von der Form $R(t_1, \ldots, t_k)$, wobei $R \in \sigma$ ein k-stelliges Relationssymbol ist und $t_1, \ldots t_k \in T_\sigma$, so ist
$$\mathrm{frei}(\varphi) \ := \ \mathrm{var}(t_1) \cup \cdots \cup \mathrm{var}(t_k).$$
- Ist φ von der Form $\neg\,\psi$ mit $\psi \in \mathrm{FO}[\sigma]$, so ist
$$\mathrm{frei}(\varphi) \ := \ \mathrm{frei}(\psi).$$
- Ist φ von der Form $(\psi_1 * \psi_2)$ mit $\psi \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$ und $\psi_1, \psi_2 \in \mathrm{FO}[\sigma]$, so ist
$$\mathrm{frei}(\varphi) \ := \ \mathrm{frei}(\psi_1) \cup \mathrm{frei}(\psi_2).$$
- Ist φ von der Form $Qx\,\psi$ mit $Q \in \{\exists, \forall\}$, $x \in \mathrm{Var}$ und $\psi \in \mathrm{FO}[\sigma]$, so ist
$$\mathrm{frei}(\varphi) \ := \ \mathrm{frei}(\psi) \setminus \{x\}.$$

Beispiel:
$$\varphi \ := \ \underbrace{\Big(\underbrace{f(v_0, c) = v_3}_{\text{freie Variablen: } v_0, v_3} \ \wedge \ \underbrace{\exists v_0 \ \underbrace{f(v_0, v_1) = c}_{\text{freie Variablen: } v_0, v_1}}_{\text{freie Variablen: } v_1} \Big)}_{\text{freie Variablen: } v_0, v_1, v_3}$$

Definition 1.22 (Sätze)**.**

Satz — Eine $\mathrm{FO}[\sigma]$-Formel φ heißt **Satz** (genauer: $\mathrm{FO}[\sigma]$-Satz), falls $\mathrm{frei}(\varphi) = \emptyset$.

S_σ — Die Menge aller $\mathrm{FO}[\sigma]$-Sätze bezeichnen wir mit S_σ.

Definition 1.23 (Belegungen und Interpretationen)**.**

Belegung in einer σ-Struktur

(a) Eine **Belegung in einer σ-Struktur** $\mathfrak{A}$ ist eine Abbildung $\beta : D \to A$ mit $\mathrm{Def}(\beta) := D \subseteq \mathrm{Var}$.

passende Belegung

(b) Eine Belegung β heißt **passend zu** $t \in T_\sigma$, falls $\mathrm{Def}(\beta) \supseteq \mathrm{var}(t)$.

(c) Eine Belegung β heißt **passend zu** $\varphi \in \mathrm{FO}[\sigma]$ (bzw. eine Belegung **für** φ), wenn $\mathrm{Def}(\varphi) \supseteq \mathrm{frei}(\varphi)$.

σ-Interpretation

(d) Eine **σ-Interpretation** ist ein Paar $\mathcal{I} = (\mathfrak{A}, \beta)$ bestehend aus einer σ-Struktur $\mathfrak{A}$ und einer Belegung β in $\mathfrak{A}$.

passende σ-Interpretation

(e) Eine σ-Interpretation $\mathcal{I} = (\mathfrak{A}, \beta)$ heißt **passend zu** (oder **Interpretation für**) $\varphi \in \mathrm{FO}[\sigma]$ (bzw. $t \in T_\sigma$), falls $\mathrm{Def}(\beta)$ passend zu φ (bzw. t) ist.

Definition 1.24 (Semantik von σ-Termen)**.**

$[\![t]\!]^{\mathcal{I}}$ — Rekursiv über den Aufbau von T_σ definieren wir eine Funktion $[\![\cdot]\!]^{\cdot}$, die jedem σ-Term $t \in T_\sigma$ und jeder zu t passenden σ-Interpretation $\mathcal{I} = (\mathfrak{A}, \beta)$ einen Wert $[\![t]\!]^{\mathcal{I}} \in A$ zuordnet:

- Für alle $x \in \mathrm{Var}$ ist $[\![x]\!]^{\mathcal{I}} := \beta(x)$.
- Für alle Konstantensymbole $c \in \sigma$ ist $[\![c]\!]^{\mathcal{I}} := c^{\mathfrak{A}}$.
- Für alle $k \in \mathbb{N}_{>0}$, alle k-stelligen Funktionssymbole $f \in \sigma$ und alle σ-Terme $t_1, \ldots, t_k \in T_\sigma$ ist
$$[\![f(t_1, \ldots, t_k)]\!]^{\mathcal{I}} \ := \ f^{\mathfrak{A}}\left([\![t_1]\!]^{\mathcal{I}}, \ldots, [\![t_k]\!]^{\mathcal{I}}\right).$$

Beispiel:
Sei $\sigma := \{ \underset{2}{f}, c \}$, und sei $\mathfrak{A} := \left(A, f^{\mathfrak{A}}, c^{\mathfrak{A}}\right)$ mit $A := \mathbb{N}$, $f^{\mathfrak{A}} := +^{\mathcal{N}}$ (die Addition auf $\mathbb{N}$), $c^{\mathfrak{A}} := 0$.
Sei β die Belegung mit $\beta(v_1) = 1$ und $\beta(v_2) = 7$, und sei $\mathcal{I} := (\mathfrak{A}, \beta)$. Sei $t := f(v_2, f(v_1, c)) \in T_\sigma$.
Dann gilt

$$\begin{aligned}
[\![t]\!]^{\mathcal{I}} &= f^{\mathfrak{A}}\left([\![v_2]\!]^{\mathcal{I}}, [\![f(v_1,c)]\!]^{\mathcal{I}}\right) \\
&= [\![v_2]\!]^{\mathcal{I}} + [\![f(v_1,c)]\!]^{\mathcal{I}} \\
&= \beta(v_2) + f^{\mathfrak{A}}\left([\![v_1]\!]^{\mathcal{I}}, [\![c]\!]^{\mathcal{I}}\right) \\
&= 7 + \left(\beta(v_1) + c^{\mathfrak{A}}\right) \\
&= 7 + (1+0) \\
&= 8.
\end{aligned}$$

Definition 1.25.

(a) Ist β eine Belegung in einer σ-Struktur $\mathfrak{A}$, ist $x \in \mathrm{Var}$ und ist $a \in A$, so sei $\beta\frac{a}{x}$ die Belegung mit $\mathrm{Def}\left(\beta\frac{a}{x}\right) := \mathrm{Def}(\beta) \cup \{ x \}$, die für alle $y \in \mathrm{Def}\left(\beta\frac{a}{x}\right)$ definiert ist durch $\beta\frac{a}{x}$

$$\beta\tfrac{a}{x}(y) := \begin{cases} a & \text{falls } y = x \\ \beta(y) & \text{sonst.} \end{cases}$$

(b) Ist $\mathcal{I} = (\mathfrak{A}, \beta)$ eine σ-Interpretation, ist $x \in \mathrm{Var}$ und ist $a \in A$, so sei $\mathcal{I}\frac{a}{x}$

$$\mathcal{I}\tfrac{a}{x} := \left(\mathfrak{A}, \beta\tfrac{a}{x}\right).$$

Definition 1.26 (Semantik der Logik erster Stufe)**.**
Rekursiv über den Aufbau von $\mathrm{FO}[\sigma]$ definieren wir eine Funktion $[\![\cdot]\!]^{\cdot}$, die jeder $\mathrm{FO}[\sigma]$-Formel φ und jeder zu φ passenden σ-Interpretation $\mathcal{I} = (\mathfrak{A}, \beta)$ einen **Wahrheitswert** (kurz: **Wert**) $[\![\varphi]\!]^{\mathcal{I}} \in \{ 0, 1 \}$ zuordnet: Wahrheitswert $[\![\varphi]\!]^{\mathcal{I}}$

- Für alle $t_1, t_2 \in T_\sigma$ ist

$$[\![t_1 = t_2]\!]^{\mathcal{I}} := \begin{cases} 1 & \text{falls } [\![t_1]\!]^{\mathcal{I}} = [\![t_2]\!]^{\mathcal{I}} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

- Für jedes $k \in \mathbb{N}_{>0}$, jedes k-stellige Relationssymbol $R \in \sigma$ und alle $t_1, \dots, t_k \in T_\sigma$ ist

$$[\![R(t_1,\dots,t_k)]\!]^{\mathcal{I}} := \begin{cases} 1 & \text{falls } \left([\![t_1]\!]^{\mathcal{I}}, \dots, [\![t_k]\!]^{\mathcal{I}}\right) \in R^{\mathfrak{A}} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

- Für alle $\psi \in \mathrm{FO}[\sigma]$ ist

$$[\![\neg\psi]\!]^{\mathcal{I}} := \begin{cases} 1 & \text{falls } [\![\psi]\!]^{\mathcal{I}} = 0 \\ 0 & \text{falls } [\![\psi]\!]^{\mathcal{I}} = 1. \end{cases}$$

- Für alle $\psi_1, \psi_2 \in \mathrm{FO}[\sigma]$ ist
  - $[\![(\psi_1 \wedge \psi_2)]\!]^{\mathcal{I}} := \begin{cases} 1 & \text{falls } [\![\psi_1]\!]^{\mathcal{I}} = 1 \text{ und } [\![\psi_2]\!]^{\mathcal{I}} = 1 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$

– $[\![(\psi_1 \vee \psi_2)]\!]^{\mathcal{I}} := \begin{cases} 1 & \text{falls } [\![\psi_1]\!]^{\mathcal{I}} = 1 \text{ oder } [\![\psi_2]\!]^{\mathcal{I}} = 1 \\ 0 & \text{sonst (d.h. } [\![\psi_1]\!]^{\mathcal{I}} = 0 \text{ und } [\![\psi_2]\!]^{\mathcal{I}} = 0). \end{cases}$

– $[\![(\psi_1 \leftrightarrow \psi_2)]\!]^{\mathcal{I}} := \begin{cases} 1 & \text{falls } [\![\psi_1]\!]^{\mathcal{I}} = [\![\psi_2]\!]^{\mathcal{I}} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$

– $[\![(\psi_1 \rightarrow \psi_2)]\!]^{\mathcal{I}} := \begin{cases} 1 & \text{falls } [\![\psi_1]\!]^{\mathcal{I}} = 0 \text{ oder } [\![\psi_2]\!]^{\mathcal{I}} = 1 \\ 0 & \text{sonst (d. h. } [\![\psi_1]\!]^{\mathcal{I}} = 1 \text{ und } [\![\psi_2]\!]^{\mathcal{I}} = 0). \end{cases}$

- Für alle $\psi \in \mathrm{FO}[\sigma]$ und alle $x \in \mathrm{Var}$ ist

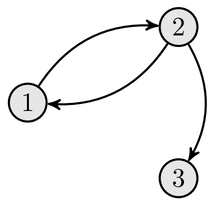
  – $[\![\exists x\ \psi]\!]^{\mathcal{I}} := \begin{cases} 1 & \text{falls es mindestens ein } a \in A \text{ gibt, so dass } [\![\psi]\!]^{\mathcal{I}\frac{a}{x}} = 1 \\ 0 & \text{sonst (d. h. für alle } a \in A \text{ gilt } [\![\psi]\!]^{\mathcal{I}\frac{a}{x}} = 0). \end{cases}$

  – $[\![\forall x\ \psi]\!]^{\mathcal{I}} := \begin{cases} 1 & \text{falls für alle } a \in A \text{ gilt } [\![\psi]\!]^{\mathcal{I}\frac{a}{x}} = 1 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$

Beispiel:

- $\sigma := \{ \underset{2}{E} \}, \ \ \varphi := \forall x \forall y\ (E(x,y) \ \rightarrow\ E(y,x))$
- $\mathfrak{A} := \big(A, E^{\mathfrak{A}}\big)$ mit $A = \{1,2,3\}, \ E^{\mathfrak{A}} = \{(1,2),(2,1),(2,3)\}$

  Skizze: $\mathfrak{A}$:

- β sei die Belegung mit $\mathrm{Def}(\beta) = \varnothing$
- $\mathcal{I} := (\mathfrak{A}, \beta)$
- $[\![\varphi]\!]^{\mathcal{I}} = 1 \iff$ für alle $a \in A$, für alle $b \in A$ gilt: $[\![(E(x,y) \rightarrow E(y,x))]\!]^{\mathcal{I}\frac{a}{x}\frac{b}{y}} = 1$

  $\iff$ für alle $a \in A$, für alle $b \in A$ gilt: $(a,b) \notin E^{\mathfrak{A}}$ oder $(b,a) \in E^{\mathfrak{A}}$

  $\iff$ für alle $a \in A$, für alle $b \in A$ gilt: falls $(a,b) \in E^{\mathfrak{A}}$, so auch $(b,a) \in E^{\mathfrak{A}}$

  ($\iff$ $E^{\mathfrak{A}}$ ist symmetrisch.)

  Da in unserem konkreten Graphen $\mathfrak{A}$ für $a = 2$, $b = 3$ gilt: $(a,b) \in E^{\mathfrak{A}}$, aber $(b,a) \notin E^{\mathfrak{A}}$, ist hier $[\![\varphi]\!]^{\mathcal{I}} = 0$.

Definition 1.27 (Modell, Erfüllbarkeit, Allgemeingültigkeit)**.**
Sei φ eine $\mathrm{FO}[\sigma]$-Formel.

Modell
$\mathcal{I} \models \varphi$

(a) Eine σ-Interpretation $\mathcal{I} = (\mathfrak{A}, \beta)$ **erfüllt** φ (bzw.: **ist ein Modell von** φ, kurz: $\mathcal{I} \models \varphi$), falls $\mathcal{I}$ passend zu φ ist und $[\![\varphi]\!]^{\mathcal{I}} = 1$.

erfüllbar
unerfüllbar

(b) φ heißt **erfüllbar**, falls es eine σ-Interpretation gibt, die φ erfüllt.
φ heißt **unerfüllbar**, falls φ nicht erfüllbar ist.

(c) φ heißt **allgemeingültig**, wenn jede zu φ passende σ-Interpretation φ erfüllt. allgemeingültig

Beobachtung:
Für alle $\varphi, \psi \in \mathrm{FO}[\sigma]$ gilt:

- φ allgemeingültig $\iff$ $\neg\varphi$ unerfüllbar.
- φ erfüllbar $\iff$ $\neg\varphi$ nicht allgemeingültig.

Beispiel 1.28. (Graphen)
Sei $\sigma := \{ \underset{2}{E} \}$, und sei $\mathfrak{A} = (A, E^{\mathfrak{A}})$ eine σ-Struktur.

(a) Für alle $a, b \in A$ gilt: Es gibt in $\mathfrak{A}$ einen Weg der Länge 3 von a nach b $\iff$

$$(\mathfrak{A}, \beta_\varnothing) \quad\models\quad \forall x \forall y\ \exists z_1 \exists z_2\ \big(E(x, z_1) \wedge E(z_1, z_2) \wedge E(z_2, y)\big).$$

Hierbei ist $\beta_\varnothing$ die Belegung mit $\mathrm{Def}(\beta_\varnothing) = \varnothing$.

(b) $\mathfrak{A}$ hat Durchmesser ≤ 3, d.h. zwischen je zwei Knoten von $\mathfrak{A}$ gibt es einen Weg der Länge ≤ 3 $\iff$

$$\begin{aligned}(\mathfrak{A}, \beta_\varnothing) \quad\models\quad \forall x \forall y\ \Big(\ & x = y\ \vee\ E(x,y)\ \vee\ \exists z\ \big(E(x,z) \wedge E(z,y)\big)\ \vee \\ & \exists z_1 \exists z_2\ \big(E(x, z_1) \wedge E(z_1, z_2) \wedge E(z_2, y)\big)\ \Big).\end{aligned}$$

Beispiel 1.29 (Arithmetik)**.**
Sei $\sigma_{\mathrm{Ar}} = \{ \leq, +, \times, 0, 1 \}$, $\mathcal{N} := \big(\mathbb{N}, \leq^{\mathcal{N}}, +^{\mathcal{N}}, \times^{\mathcal{N}}, 0^{\mathcal{N}}, 1^{\mathcal{N}}\big)$, $a, b, c \in \mathbb{N}$ und β die Belegung mit $\beta(v_1) = a,\ \beta(v_2) = b,\ \beta(v_3) = c$.

(a) $a \,|\, b$ ("a teilt b in $\mathbb{N}$") $\iff$ $(\mathcal{N}, \beta) \models \varphi_{\mathrm{teilt}}(v_1, v_2)$ mit

$$\varphi_{\mathrm{teilt}}(v_1, v_2) \quad:=\quad \exists v_0\ v_1 \times v_0 = v_2\ .$$

(b) $c = a - b$ $\iff$ $(\mathcal{N}, \beta) \models \varphi_{-}(v_1, v_2, v_3)$ mit

$$\varphi_{-}(v_1, v_2, v_3) \quad:=\quad v_2 + v_3 = v_1.$$

(c) a ist eine Primzahl $\iff$ $(\mathcal{N}, \beta) \models \varphi_{\mathrm{prim}}(v_1)$ mit

$$\begin{aligned}\varphi_{\mathrm{prim}}(v_1) \quad:=\quad & \neg\, v_1 = 0\ \wedge \neg\, v_1 = 1\ \wedge \\ & \forall v_4 \forall v_5\ \big(v_1 = v_4 \times v_5\ \rightarrow\ (v_4 = 1\ \vee\ v_5 = 1)\big).\end{aligned}$$

(d) Es gibt unendlich viele verschiedene Primzahlen $\iff$

$$(\mathcal{N}, \beta_\varnothing) \quad\models\quad \forall v_0\ \exists v_1\ \ \big(v_0 \leq v_1\ \wedge\ \varphi_{\mathrm{prim}}(v_1)\big).$$

1.4 Das Koinzidenzlemma

Das Koinzidenzlemma präzisiert den (anschaulich offensichtlichen) Sachverhalt, dass die Frage, ob eine $\mathrm{FO}[\sigma]$-Formel φ von einer σ-Interpretation $\mathcal{I} = (\mathfrak{A}, \beta)$ erfüllt wird (d.h. ob $\mathcal{I} \models \varphi$ gilt), nur abhängt von

- der Belegung der in φ frei vorkommenden Variablen (d.h. für Variablen $x \notin \text{frei}(\varphi)$ ist egal, welchen Wert $\beta(x)$ annimmt) und
- der Interpretation $S^{\mathfrak{A}}$ der Symbole $S \in \sigma$, die in φ vorkommen (d.h. für Symbole $S' \in \sigma$, die nicht in φ erwähnt werden, ist egal, wie $(S')^{\mathfrak{A}}$ aussieht).

Zur präzisen Formulierung des Koinzidenzlemmas sind folgende Notationen nützlich:

Definition 1.30.
Seien σ_1, σ_2 zwei Signaturen. Sei $\mathcal{I}_1 = (\mathfrak{A}_1, \beta_1)$ eine σ_1-Interpretation und sei $\mathcal{I}_2 = (\mathfrak{A}_2, \beta_2)$ eine σ_2-Interpretation mit $A_1 = A_2$ (d.h. $\mathfrak{A}_1$ und $\mathfrak{A}_2$ haben dasselbe Universum).

(a) $\mathcal{I}_1$ und $\mathcal{I}_2$ (bzw. $\mathfrak{A}_1$ und $\mathfrak{A}_2$) **stimmen auf einem Symbol S überein**, wenn $S \in \sigma_1 \cap \sigma_2$ und $S^{\mathfrak{A}_1} = S^{\mathfrak{A}_2}$.

(b) $\mathcal{I}_1$ und $\mathcal{I}_2$ (bzw. β_1 und β_2) **stimmen auf einer Variablen x überein**, wenn $x \in \text{Def}(\beta_1) \cap \text{Def}(\beta_2)$ und $\beta_1(x) = \beta_2(x)$.

Satz 1.31 (Koinzidenzlemma)**.**
Seien σ, σ_1, σ_2 Signaturen mit $\sigma \subseteq \sigma_1 \cap \sigma_2$. Für $i = 1, 2$ sei $\mathcal{I}_i = (\mathfrak{A}_i, \beta_i)$ eine σ_i Interpretation.

(a) Sei $t \in T_\sigma$, so dass $\mathcal{I}_1$ und $\mathcal{I}_2$ auf allen in t vorkommenden Symbolen und Variablen übereinstimmen. Dann gilt: $[\![t]\!]^{\mathcal{I}_1} = [\![t]\!]^{\mathcal{I}_2}$.

(b) Sei $\varphi \in \text{FO}[\sigma]$, so dass $\mathcal{I}_1$ und $\mathcal{I}_2$ auf allen in φ vorkommenden Symbolen und auf allen freien Variablen von φ übereinstimmen. Dann gilt: $\mathcal{I}_1 \models \varphi \iff \mathcal{I}_2 \models \varphi$.

Beweis: Einfaches Nachrechnen: per Induktion nach dem Aufbau von T_σ $\big($bei (a)$\big)$ bzw. $\text{FO}[\sigma]$ $\big($bei (b)$\big)$.
Details: Übung. $\square$

Bemerkung 1.32. Wegen des Koinzidenzlemmas können wir einerseits immer annehmen, dass Belegungen "minimal" sind (d.h. ihr Definitionsbereich enthält gerade die freien Variablen einer Formel oder eines Terms). Andererseits können wir aber auch annehmen, dass ihr Definitionsbereich "maximal" ist (d.h. **alle** Variablen aus Var enthält). Beides wird gelegentlich nützlich sein.

Notation 1.33.

(a) Für $\varphi \in \text{FO}[\sigma]$ schreiben wir $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$, um anzudeuten, dass $\text{frei}(\varphi) \subseteq \{x_1, \ldots, x_n\}$.

Sei $\mathcal{I} = (\mathfrak{A}, \beta)$ eine σ-Interpretation mit $\text{Def}(\beta) \supseteq \{x_1, \ldots, x_1\} \supseteq \text{frei}(\varphi)$. Für $i = 1, \ldots, n$ sei $a_i := \beta(x_i)$. An Stelle von $\mathcal{I} \models \varphi$ schreiben wir oft auch $\mathfrak{A} \models \varphi[\frac{a_1}{x_1}, \ldots, \frac{a_n}{x_n}]$.

Beachte: Diese Schreibweise ist zulässig, da nach dem Koinzidenzlemma für alle σ-Interpretationen $\mathcal{I}' = (\mathfrak{A}, \beta')$ mit $\beta'(x_i) = a_i$ für $i = 1, \ldots, n$ gilt:

$$\mathcal{I}' \models \varphi \iff \mathcal{I} \models \varphi.$$

(b) Um die Notation weiter zu vereinfachen schreiben wir auch kurz

$$\mathfrak{A} \models \varphi[a_1, \ldots, a_n] \quad \text{an Stelle von} \quad \mathfrak{A} \models \varphi\left[\tfrac{a_1}{x_1}, \ldots, \tfrac{a_n}{x_n}\right].$$

(c) Für **FO[σ]-Sätze** φ schreiben wir einfach

$$\mathfrak{A} \models \varphi \quad \text{an Stelle von} \quad \text{“}(\mathfrak{A}, \beta) \models \varphi \text{ für eine Belegung } \beta\text{”.}$$

Beachte: Gemäß Koinzidenzlemma gilt für alle Belegungen β und β', dass

$$(\mathfrak{A}, \beta) \models \varphi \iff (\mathfrak{A}, \beta') \models \varphi.$$

(d) Ähnliche Schreibweisen verwenden wir für Terme:

- Ist $t \in T_\sigma$ mit $\operatorname{var}(t) \subseteq \{x_1, \dots, x_n\}$, so schreibe kurz auch $t(x_1, \dots, x_n)$.
- Ist $\mathcal{I} = (\mathfrak{A}, \beta)$ eine σ-Interpretation mit $\operatorname{Def}(\beta) \supseteq \{x_1, \dots, x_n\}$ und $a_i := \beta(x_i)$ für $i = 1, \dots, n$, so schreibe an Stelle von $[\![t]\!]^{\mathcal{I}}$ auch

$$t^{\mathfrak{A}} \left[\tfrac{a_1}{x_1}, \dots, \tfrac{a_n}{x_n}\right] \quad \text{bzw.} \quad t^{\mathfrak{A}}[a_1, \dots, a_n].$$

- An Stelle von $[\![t]\!]^{\mathcal{I}}$ schreiben wir manchmal auch $\mathcal{I}(t)$.

Definition 1.34 (Redukte und Expansionen)**.**
Seien σ, τ Signaturen mit $\tau \subseteq \sigma$.

(a) Das τ**-Redukt** einer σ-Struktur $\mathfrak{A}$ ist die τ-Struktur $\mathfrak{A}_{|\tau}$ mit Universum $A_{|\tau} = A$, die mit $\mathfrak{A}$ auf allen Symbolen aus τ übereinstimmt. Redukt

(b) Eine σ**-Expansion** einer τ-Struktur $\mathfrak{B}$ ist eine σ-Struktur $\mathfrak{A}$, für die gilt: $\mathfrak{A}_{|\tau} = \mathfrak{B}$. Expansion

Beispiel 1.35.
Zur Erinnerung: Das Standardmodell der Arithmetik ist

$$\mathcal{N} = \left(\mathbb{N}, \leq^{\mathcal{N}}, +^{\mathcal{N}}, \times^{\mathcal{N}}, 0^{\mathcal{N}}, 1^{\mathcal{N}}\right).$$

Das $\{\leq, +, 0\}$-Redukt von $\mathcal{N}$ ist

$$\mathcal{N}_{|\{\leq,+,0\}} = \left(\mathbb{N}, \leq^{\mathcal{N}}, +^{\mathcal{N}}, 0^{\mathcal{N}}\right).$$

Die Struktur $\mathcal{N}_{|\{\leq,+,0\}}$ bezeichnet man als das **Standardmodell der Presburger Arithmetik** (benannt nach M. Presburger, 1904–1943). Standardmodell der Presburger Arithmetik

1.5 Das Isomorphielemma

Anschaulich besagt das folgende Isomorphielemma, dass zwei σ-Strukturen, die isomorph sind, genau dieselben FO[σ]-Sätze erfüllen. D.h. isomorphe Strukturen können nicht durch FO[σ]-Sätze unterschieden werden.

Satz 1.36 (Isomorphielemma)**.**
Sei φ ein FO[σ]*-Satz und seien $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ zwei isomorphe σ-Strukturen. Dann gilt*

$$\mathfrak{A} \models \varphi \quad \iff \quad \mathfrak{B} \models \varphi.$$

Beweis: Sei $\pi : \mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$ ein Isomorphismus von $\mathfrak{A}$ nach $\mathfrak{B}$.

Behauptung 1:
Für alle σ-Terme $t(x_1, \dots, x_n)$ und alle $a_1, \dots, a_n \in A$ gilt:

$$\pi(t^{\mathfrak{A}}[a_1, \dots, a_n]) = t^{\mathfrak{B}}[\pi(a_1), \dots, \pi(a_n)].$$

Beweis: Einfaches Nachrechnen per Induktion nach dem Aufbau von T_σ.
Details: Übung. $\square$

Behauptung 2:
Für alle FO[σ]-Formeln $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ und alle $a_1, \ldots, a_n \in A$ gilt:

$$\mathfrak{A} \models \varphi[a_1, \ldots, a_n] \iff \mathfrak{B} \models \varphi[\pi(a_1), \ldots, \pi(a_n)].$$

Beweis: Einfaches Nachrechnen per Induktion nach dem Aufbau von FO[σ].
Details: Übung. $\square$

Beachte: Die Aussage von Satz 1.36 folgt direkt aus Behauptung 2. $\square_{\text{Satz 1.36}}$

Obiger Beweis zeigt sogar folgendes Resultat:

Korollar 1.37.
Seien $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ σ-Strukturen und sei $\pi : \mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$. Für jede FO[$\sigma$]*-Formel $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ und alle $a_1, \ldots, a_n \in A$ gilt:*

$$\mathfrak{A} \models \varphi[a_1, \ldots, a_n] \iff \mathfrak{B} \models \varphi[\pi(a_1), \ldots, \pi(a_n)].$$

1.6 Literaturhinweise

Zur weiteren Lektüre bieten sich die folgenden Kapitel aus [EFT07] an:

- Kapitel 3.1 "Strukturen und Interpretationen" zu Abschnitt 1.1.
- Die Kapitel 2 "Syntax der Sprachen erster Stufe", 3.2 "Eine Normierung der umgangssprachlichen Junktoren" , sowie 3.3 "Die Modellbeziehung" zu Abschnitt 1.2
- Die Kapitel 3.3 bis 3.6 zu Abschnitt 1.3

1.7 Übungsaufgaben

Aufgabe 1.1. Geben Sie σ_{Ar}-Formeln an, die im Standardmodell $\mathcal{N}$ der Arithmetik folgende intuitive Bedeutung haben:

(a) Jede natürliche Zahl ist Summe von vier Quadratzahlen.

(b) Jede Primzahl ist Summe zweier Quadratzahlen.

(c) Es gibt unendlich viele Primzahlen $p \in \mathbb{N}$, so dass $p = 3m + 2$ für eine Zahl $m \in \mathbb{N}$.

(d) $\sqrt{2}$ ist irrational, d.h. es gibt keine Zahlen $m, n \in \mathbb{N}$ mit $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$.

(e) Jede zusammengesetzte Zahl $n \in \mathbb{N}$ besitzt einen Teiler $m \in \mathbb{N}$ mit $m \leq \sqrt{n}$.

Aufgabe 1.2. Sei σ eine Signatur, die aus endlich vielen Symbolen besteht und sei $\mathfrak{A}$ eine beliebige σ-Struktur, deren Universum A endlich ist.

(a) Geben Sie einen σ-Satz $\varphi_{\mathfrak{A}}$ an, der die Struktur $\mathfrak{A}$ bis auf Isomorphie eindeutig beschreibt. D.h. es soll für alle σ-Strukturen $\mathfrak{B}$ gelten: $\mathfrak{B} \models \varphi_{\mathfrak{A}} \iff \mathfrak{B} \cong \mathfrak{A}$.

(b) Beweisen Sie, dass ihre Formel $\varphi_{\mathfrak{A}}$ die in (a) geforderte Eigenschaft tatsächlich besitzt. D.h. zeigen Sie, dass für alle σ-Strukturen $\mathfrak{B}$ gilt: $\mathfrak{B} \models \varphi_{\mathfrak{A}} \iff \mathfrak{B} \cong \mathfrak{A}$.

Aufgabe 1.3. Beweisen Sie das Isomorphielemma (Satz 1.36).

Aufgabe 1.4. Sei $\sigma = \{\leq, P_a, P_b\}$ die Signatur, die aus dem 2-stelligen Relationssymbol $\leq$ sowie zwei 1-stelligen Relationssymbolen P_a und P_b besteht.
Einem endlichen Wort $w = w_1 \cdots w_n$ der Länge $n \geq 1$ über dem Alphabet $\Sigma := \{a, b\}$ ordnen wir die folgende σ-Struktur $\mathfrak{A}_w = \left(A_w, \leq^{\mathfrak{A}_w}, P_a^{\mathfrak{A}_w}, P_b^{\mathfrak{A}_w}\right)$ zu:

- $A_w := \{1, \ldots, n\}$,
- $\leq^{\mathfrak{A}_w}$ ist die natürliche lineare Ordnung auf $\{1, \ldots, n\}$,
- $P_a^{\mathfrak{A}_w} := \{\, i \in A_w \ : \ w_i = a \,\}$,
- $P_b^{\mathfrak{A}_w} := \{\, i \in A_w \ : \ w_i = b \,\}$.

Ein FO[σ]-Satz φ *beschreibt* eine Sprache $L \subseteq \Sigma^*$, falls für jedes nicht-leere Wort $w \in \Sigma^*$ gilt: $w \in L \iff \mathfrak{A}_w \models \varphi$.

(a) Welche Sprache beschreibt der folgende FO[σ]-Satz φ_0?

$$\varphi_0 \ := \ \exists x \, \exists y \left(\big(x \leq y \ \ \wedge \ \neg x{=}y \ \big) \ \wedge \ \forall z \ \big((z \leq x \ \wedge \ P_a(z)) \ \vee \ (y \leq z \ \wedge \ P_b(z)) \big) \right)$$

(b) Geben Sie einen FO[σ]-Satz an, der die durch den regulären Ausdruck $a(a|b)^* bb(a|b)^*$ definierte Sprache beschreibt.

(c) Können Sie auch einen FO[σ]-Satz finden, der die Sprache aller Worte beschreibt, in denen die Anzahl der in ihnen vorkommenden as gerade ist?
Falls ja, geben Sie den Satz an; falls nein, versuchen Sie zu erklären, warum es keinen solchen Satz zu geben scheint.