Goethe-Universität Frankfurt am Main
Institut für Informatik
Theorie komplexer Systeme
Prof. Dr. Nicole Schweikardt

2. Februar 2010

Logik in der Informatik

Wintersemester 2009 / 2010

Übungsblatt 13

Zu bearbeiten bis Dienstag, 9. Februar 2010

Aufgabe 1: (25 Punkte)

Beweisen Sie Satz 9.24 aus der Vorlesung, d.h. zeigen Sie Folgendes:
Ist $\sigma = \{P_1, \ldots, P_k\}$ eine endliche Signatur, die aus k Relationssymbolen der Stelligkeit 1 besteht, so ist das endliche Erfüllbarkeitsproblem für FO[σ] entscheidbar.

Aufgabe 2: (25 Punkte)

Sei E ein 2-stelliges Relationssymbol. Zeigen Sie, dass endl-Erf-FO[$\{E\}$] unentscheidbar ist.

Überlegen Sie sich dazu zunächst eine geeignete Repräsentation von σ-Strukturen (für beliebige endliche Signaturen σ) durch gerichtete Graphen.

Nutzen Sie dann, dass das Problem endl-Erf-FO[$\tilde{\sigma}_{\text{Ar}}$] für die Signatur $\tilde{\sigma}_{\text{Ar}}$ aus dem Beweis von Satz 9.25 unentscheidbar ist.

Aufgabe 3: (25 Punkte)

Beweisen Sie die folgende Behauptung aus dem Beweis von Satz 9.25 (Satz von Trakhtenbrot):
Sei $\tilde{\sigma}_{\text{Ar}}$ die im Beweis von Satz 9.25 konstruierte Signatur. Für jede endliche $\tilde{\sigma}_{\text{Ar}}$-Struktur $\mathfrak{A}$ gilt: $\mathfrak{A}$ erfüllt die Bedingungen 1)–5) aus dem Beweis von Satz 9.25 genau dann, wenn es ein $m \in \mathbb{N}_{\geqslant 1}$ gibt, so dass $\mathfrak{A} \cong \mathcal{N}|_{\{0,\ldots,m\}}$.

Aufgabe 4: (25 Punkte)

Sei σ eine Signatur, die mindestens ein 2-stelliges Relationssymbol enthält, seien $r, s \in \mathbb{N}$ und sei R ein r-stelliges Relationssymbol mit $R \notin \sigma$.

Eine Formel $\varphi(x_1, .., x_s) \in$ FO[$\sigma \dot\cup \{R\}$] heißt *im Endlichen monoton in* R, wenn für alle endlichen σ-Strukturen $\mathfrak{A}$ und alle Relationen $R_1^{\mathfrak{A}}, R_2^{\mathfrak{A}} \subseteq A^r$ gilt:

$$\text{Falls } R_1^{\mathfrak{A}} \subseteq R_2^{\mathfrak{A}}, \text{ so } \varphi\big(\mathfrak{A}, R_1^{\mathfrak{A}}\big) \subseteq \varphi\big(\mathfrak{A}, R_2^{\mathfrak{A}}\big),$$

wobei $\varphi(\mathfrak{A}, R_i^{\mathfrak{A}}) := \{\bar{a} \in A^s : (\mathfrak{A}, R_i^{\mathfrak{A}}) \models \varphi[\bar{a}]\}$.

Beweisen Sie, dass das folgende Problem unentscheidbar ist.

> MONOTONIE IM ENDLICHEN:
> *Eingabe:* Eine FO[$\sigma \dot\cup \{R\}$]-Formel $\varphi(x_1, \ldots, x_s)$.
> *Frage:* Ist $\varphi(x_1, \ldots, x_s)$ im Endlichen monoton in R ?

Hinweis: Benutzen Sie den Satz von Trakhtenbrot.