Goethe-Universität Frankfurt am Main
Institut für Informatik
Theorie komplexer Systeme
Prof. Dr. Nicole Schweikardt

26. Januar 2010

Logik in der Informatik

Wintersemester 2009 / 2010

Übungsblatt 12

Zu bearbeiten bis Dienstag, 2. Februar 2010

Aufgabe 1: (25 Punkte)

Arbeiten Sie die Details zu Lemma 9.19 aus.

Aufgabe 2: (25 Punkte)

Betrachten Sie Turingmaschinen (siehe Abschnitt 9.3.2 im Skript), deren Zustandsmengen endliche Teilmengen von $\mathbb{N}$ sind.

Geben Sie eine geeignete Gödelisierung für solche Turingmaschinen an. D.h. geben Sie eine berechenbare, injektive Funktion $\langle\cdot\rangle$ an, die jeder solchen Turingmaschine M eine natürliche Zahl $n_M := \langle M\rangle$ zuordnet.

Aufgabe 3: (25 Punkte)

Welche der folgenden Relationen bzw. partiellen Functionen sind Σ_1-definierbar, welche nicht? Beweisen Sie jeweils, dass Ihre Antwort korrekt ist.

(a) $\exp\colon \mathbb{N}\times\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ mit $\exp(a,b) := a^b$ (f.a. $a,b\in\mathbb{N}$)

(b) $\text{Bit} := \{(n,i)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N} :$ das i-te Bit in der Binärdarstellung von n ist 1$\}$

(c) $\text{H} := \{n_M :$ M ist eine Turing-Maschine, deren Zustandsmenge eine endliche Teilmenge von $\mathbb{N}$ ist, die bei leerer Eingabe nach endlich vielen Schritten anhält$\}$

(d) $\overline{\text{H}} := \mathbb{N}\setminus\text{H}$

Aufgabe 4: (25 Punkte)

Beweisen Sie die Korrektheit der Aussage von Bemerkung 9.22, d.h. zeigen Sie:

(a) Sei $k\in\mathbb{N}_{\geqslant 1}$. Eine partielle Funktion f von $\mathbb{N}^k$ nach $\mathbb{N}$ ist genau dann TM-berechenbar, wenn sie Σ_1-definierbar ist.

(b) Sei $k\in\mathbb{N}$. Eine Relation $R\subseteq\mathbb{N}^k$ ist genau dann TM-rekursiv aufzählbar, wenn sie Σ_1-definierbar ist.