Goethe-Universität Frankfurt am Main
Institut für Informatik
Theorie komplexer Systeme
Prof. Dr. Nicole Schweikardt

12. Januar 2010

# Logik in der Informatik

Wintersemester 2009 / 2010

## Übungsblatt 10

*Zu bearbeiten bis Dienstag, 19. Januar 2010*

**Aufgabe 1:** (20 Punkte)

Sei $\sigma := \{c_r : r \in \mathbb{R}\}$ eine Signatur, die aus überabzählbar vielen Konstantensymbolen besteht. Finden Sie eine Menge $\Phi$ von FO[$\sigma$]-Formeln, die erfüllbar ist, aber kein abzählbares Modell besitzt.

**Aufgabe 2:** (30 Punkte)

Beweisen Sie Bemerkung 8.16, d.h. zeigen Sie Folgendes: Sei $\sigma$ eine beliebige Signatur und sei $\mathfrak{A}$ eine beliebige $\sigma$-Struktur. Dann gilt:

(a) Ist $\mathfrak{A}$ endlich, so gilt für alle $\sigma$-Strukturen $\mathfrak{B}$: $\quad \mathfrak{B} \equiv \mathfrak{A} \iff \mathfrak{B} \cong \mathfrak{A}$.

(b) Ist $\mathfrak{A}$ unendlich, so gibt es eine $\sigma$-Struktur $\mathfrak{B}$ mit $\mathfrak{B} \equiv \mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B} \not\cong \mathfrak{A}$.

*Hinweise:* Für (b) können Sie den aufsteigenden Satz von Löwenheim und Skolem benutzen. Für (a) können Sie folgendermaßen vorgehen: Nutzen Sie Aufgabe 2 von Übungsblatt 1, um zu zeigen, dass (a) für *endliche* Signaturen gilt. Folgern Sie daraus, dass für *beliebige* Signaturen gilt: Falls $\mathfrak{B} \equiv \mathfrak{A}$, so ist $|B| = |A|$. Folgern Sie daraus, dass (a) für abzählbare Signaturen gilt. Folgern Sie dann, dass (a) auch für beliebige Signaturen gilt.

**Aufgabe 3:** (30 Punkte)

Sei $\sigma := \{E\}$ die Signatur, die aus einem 2-stelligen Relationssymbol $E$ besteht. Zeigen Sie:

(a) Die Klasse aller azyklischen (endlichen oder unendlichen) Graphen ist axiomatisierbar.

(b) Die Klasse aller azyklischen (endlichen oder unendlichen) Graphen ist nicht endlich axiomatisierbar.

(c) Die Klasse aller endlichen azyklischen Graphen ist nicht axiomatisierbar.

*Zur Erinnerung:* Ein gerichteter Graph ist azyklisch, falls er keinen Kreis endlicher Länge besitzt.

**Aufgabe 4:** (20 Punkte)

Geben Sie einen FO[$\{\leqslant\}$]-Satz $\chi$ an, so dass für alle $\{\leqslant\}$-Strukturen $\mathfrak{A}$ gilt:

$\mathfrak{A} \models \chi \iff$ $\mathfrak{A}$ ist eine diskrete lineare Ordnung, die ein kleinstes, aber kein größtes Element besitzt.