Goethe-Universität Frankfurt am Main
Institut für Informatik
Theorie komplexer Systeme
Prof. Dr. Nicole Schweikardt

8. Dezember 2009

Logik in der Informatik

Wintersemester 2009 / 2010

Übungsblatt 8

Zu bearbeiten bis Dienstag, 15. Dezember 2009

Aufgabe 1: (25 Punkte)

Zeigen Sie, dass für die Regel

$$(\exists\text{A}) : \quad \frac{\Gamma,\ \varphi\frac{y}{x} \ \vdash\ \psi}{\Gamma,\ \exists x\,\varphi \ \vdash\ \psi} \quad \text{falls } y \notin \mathit{frei}(\Gamma,\ \exists x\,\varphi,\ \psi)$$

des Sequenzenkalküls $\mathscr{S}$ gilt: Wenn die Voraussetzung korrekt ist, dann ist die Konsequenz korrekt.

Aufgabe 2: (25 Punkte)

Zeigen Sie, dass die Regel $\dfrac{\Gamma,\ \varphi,\ \psi \ \vdash\ \chi}{\Gamma \ \vdash\ \big((\varphi \wedge \psi) \rightarrow \chi\big)}$ im Sequenzenkalkül $\mathscr{S}$ ableitbar ist.

Aufgabe 3: (25 Punkte)

Sei M eine Menge und sei $\mathcal{K}$ ein Kalkül über M. Im Folgenden notieren wir Ableitungsregeln über M der Form

$$\begin{array}{c} a_1 \\ \vdots \\ a_n \\ \hline b \end{array}$$

als $\dfrac{a_1 \cdots a_n}{b}$.

Definition:

(a) Eine Ableitungsregel $\dfrac{a_1 \cdots a_n}{b}$ über M heißt *in $\mathcal{K}$ ableitbar*, wenn b aus $\{a_1, \ldots, a_n\}$ in $\mathcal{K}$ ableitbar ist.

(b) Zwei Kalküle $\mathcal{K}_1$ und $\mathcal{K}_2$ über M heißen *gleich stark*, wenn für alle $V \subseteq M$ gilt: Die Menge der aus V in $\mathcal{K}_1$ ableitbaren Elemente ist gleich der Menge der aus V in $\mathcal{K}_2$ ableitbaren Elemente.

Zeigen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $a_1, \ldots, a_n, b \in M$ gilt:

$\dfrac{a_1 \cdots a_n}{b}$ ist genau dann in $\mathcal{K}$ ableitbar, wenn $\mathcal{K}$ und $\mathcal{K} \cup \left\{ \dfrac{a_1 \ldots a_n}{b} \right\}$ gleich stark sind.

Aufgabe 4: (25 Punkte)

Betrachten Sie die Regel

$$(\forall\exists) \quad \frac{}{\Gamma,\ \exists x\,\varphi \ \vdash\ \forall x\,\varphi}$$

(a) Prüfen Sie, ob die Regel $(\forall\exists)$ im Sequenzenkalkül $\mathscr{S}$ ableitbar ist.

(b) Sei $\mathscr{S}'$ der Kalkül, der aus dem Sequenzenkalkül $\mathscr{S}$ durch Hinzufügen der Regel $(\forall\exists)$ entsteht. Prüfen Sie, ob jede Sequenz in $\mathscr{S}'$ ableitbar ist.