Goethe-Universität Frankfurt am Main
Institut für Informatik
Theorie komplexer Systeme
Prof. Dr. Nicole Schweikardt

1. Dezember 2009

Logik in der Informatik

Wintersemester 2009 / 2010

Übungsblatt 7

Zu bearbeiten bis Dienstag, 8. Dezember 2009

Aufgabe 1: (20 Punkte)

Aus der Vorlesung wissen Sie, dass für jede endliche Signatur σ, jede Klasse S von σ-Strukturen und jede Anfrage Q gilt:

$$Q \text{ ist FO-definierbar auf } \mathsf{S} \implies Q \text{ ist Gaifman-lokal auf } \mathsf{S}.$$

Gilt auch die Umkehrung? D.h. gilt für jede Anfrage Q:

$$Q \text{ ist Gaifman-lokal auf } \mathsf{S} \implies Q \text{ ist FO-definierbar auf } \mathsf{S}\ ?$$

Belegen Sie Ihre Antwort, indem Sie entweder beweisen, dass die Umkehrung gilt, oder indem Sie ein Gegenbeispiel angeben.

Aufgabe 2: (30 Punkte)

Finden Sie einen auf dem Satz von Hanf beruhenden Beweis der folgenden Variante des Satzes von Seese:

Für jede Zahl $d \in \mathbb{N}_{\geqslant 1}$ und jeden FO$[\{E\}]$-Satz φ gibt es einen Algorithmus, der das

AUSWERTUNGSPROBLEM FÜR φ AUF DER KLASSE ALLER ENDLICHEN GRAPHEN VOM GRAD $\leqslant d$	
Eingabe:	ein endlicher Graph G vom Grad $\leqslant d$
Frage:	Gilt $G \models \varphi$?

in Zeit $\mathcal{O}(n)$ löst, wobei $n = |V^G| + |E^G|$ für $G = (V^G, E^G)$ ist.

Aufgabe 3: (30 Punkte)

Sei Σ ein endliches Alphabet. Die Klasse SFR_Σ aller *sternfreien regulären Ausdrücke über* Σ ist rekursiv wie folgt definiert:

- Das Symbol $\emptyset$ gehört zu SFR_Σ.
- Für jedes $a \in \Sigma$ gehört das Symbol a zu SFR_Σ.
- Sind $r \in \mathsf{SFR}_\Sigma$ und $s \in \mathsf{SFR}_\Sigma$, so gehören auch die Ausdrücke $\bar{r}$, $(r|s)$ und $(r \cdot s)$ zu SFR_Σ.

Jeder sternfreie reguläre Ausdruck r *beschreibt* eine Sprache $L(r)$, die wie folgt definiert ist:

- $L(\emptyset) := \emptyset$.
- Für jedes $a \in \Sigma$ ist $L(a) := \{a\}$.

— auf der nächsten Seite geht's weiter —

- Für alle $r, s \in \mathsf{SFR}_\Sigma$ ist
  - $L(\bar{r}) \;:=\; \Sigma^* \setminus L(r)$,
  - $L((r|s)) \;:=\; L(r) \cup L(s)$ und
  - $L((r \cdot s)) \;:=\; \{uw \,:\, u \in L(r) \text{ und } w \in L(s)\}$.

Eine Sprache $L \subseteq \Sigma^*$ heißt *sternfrei regulär*, wenn es ein $r \in \mathsf{SFR}_\Sigma$ mit $L(r) = L$ gibt.

Sei $\Sigma := \{a, b\}$ und sei $\sigma := \{\leqslant, P_a, P_b\}$.

(a) Geben Sie sternfreie reguläre Ausdrücke an, die die folgenden Sprachen beschreiben:

(i) Σ^*

(ii) a^*b^*

(iii) $a(a|b)^*bb(a|b)^*$

(b) Zeigen Sie, dass Folgendes gilt:

Für jede sternfreie reguläre Sprache L gibt es einen FO$[\sigma]$-Satz, der die Sprache L beschreibt (im Sinne von Aufgabe 4 von Blatt 1).

Aufgabe 4: (20 Punkte)

Finden Sie eine Sprache L, für die Sie Folgendes beweisen können:

L ist regulär, aber L ist nicht sternfrei regulär.