

## Logik in der Informatik

Wintersemester 2009/2010

### Übungsblatt 6

Zu bearbeiten bis Dienstag, 1. Dezember 2009

#### Aufgabe 1:

(25 Punkte)

Stellen Sie für jede der beiden folgenden Formeln fest, ob sie in Gaifman-Normalform ist. Begründen Sie Ihre Antwort und geben Sie gegebenenfalls eine äquivalente Formel in Gaifman-Normalform an.

(a)  $\varphi_1(x) := \forall y E(x, y)$

(b)  $\varphi_2(x_1, x_2) := \neg x_1 = x_2 \wedge \forall y (E(x_1, y) \vee E(x_2, y))$

#### Aufgabe 2:

(25 Punkte)

Sei  $M$  eine endliche Menge von Formeln. Entwickeln Sie einen Algorithmus, der bei Eingabe einer beliebigen Formel  $\varphi \in BC(M)$  eine zu  $\varphi$  äquivalente Formel in disjunktiver Normalform ausgibt, d.h. eine Formel der Form

$$\bigvee_{i \in I} \left( \bigwedge_{j \in J_i} \psi_{i,j} \right),$$

wobei  $I$  und  $(J_i)_{i \in I}$  endliche Indexmengen sind und  $\psi_{i,j} \in M \cup \{\neg\chi : \chi \in M\}$ , für alle  $i \in I$  und alle  $j \in J_i$ .

#### Aufgabe 3:

(25 Punkte)

Entwickeln Sie einen Algorithmus, der bei Eingabe von zwei Zahlen  $k, r \in \mathbb{N}_{\geq 1}$  und einer FO[ $\sigma$ ]-Formel  $\psi(x_1, \dots, x_k, y)$ , die  $r$ -lokal um  $x_1, \dots, x_k, y$  ist, eine FO[ $\sigma$ ]-Formel  $\tilde{\psi}(x_1, \dots, x_k, y)$  ausgibt, für die gilt:

(I)  $\tilde{\psi}(x_1, \dots, x_k, y)$  ist eine Boolesche Kombination von

(i) Formeln, die  $r$ -lokal um  $x_1, \dots, x_k$  sind, und

(ii) Formeln, die  $r$ -lokal um  $y$  sind,

und

(II) für alle  $\sigma$ -Strukturen  $\mathfrak{A}$  und alle  $a_1, \dots, a_k, b \in A$  mit  $\text{Dist}^{\mathfrak{A}}(b, \{a_1, \dots, a_k\}) > 2r + 1$  gilt:

$$\mathfrak{A} \models \tilde{\psi}[a_1, \dots, a_k, b] \iff \mathfrak{A} \models \psi[a_1, \dots, a_k, b].$$

#### Aufgabe 4:

(25 Punkte)

Für  $k, \ell \in \mathbb{N}_{\geq 1}$  sei  $\mathfrak{G}_{k,\ell}$  das in Aufgabe 4 von Übungsblatt 4 definierte  $(k \times \ell)$ -Gitter. Sei  $Diag$  die einstellige Anfrage, die jedem Gitter  $\mathfrak{G}_{k,\ell}$  die Diagonale

$$Diag(\mathfrak{G}_{k,\ell}) := \{(i, i) : 1 \leq i \leq \min(k, \ell)\}$$

zuordnet.

Zeigen Sie: Die Anfrage  $Diag$  ist nicht FO-definierbar.