Goethe-Universität Frankfurt am Main
Institut für Informatik
Theorie komplexer Systeme
Prof. Dr. Nicole Schweikardt

17. November 2009

Logik in der Informatik

Wintersemester 2009 / 2010

Übungsblatt 5

Zu bearbeiten bis Dienstag, 24. November 2009

Aufgabe 1: (25 Punkte)

Für $k \in \mathbb{N}_{\geqslant 1}$ sei $\mathsf{k\text{-}Col}$ die Klasse aller k-färbbaren endlichen ungerichteten Graphen. Zeigen Sie:

(a) $\mathsf{2\text{-}Col}$ ist nicht FO-definierbar in $\mathsf{UGraphs}$

(b) $\mathsf{3\text{-}Col}$ ist nicht FO-definierbar in $\mathsf{UGraphs}$.

Aufgabe 2: (25 Punkte)

Aus der Vorlesung wissen Sie, dass für jede Klasse S von σ-Strukturen und jede Klasse $\mathsf{C} \subseteq \mathsf{S}$ gilt:

$$\mathsf{C} \text{ ist FO-definierbar in } \mathsf{S} \implies \mathsf{C} \text{ ist Hanf-lokal in } \mathsf{S}.$$

Gilt auch die Umkehrung? D.h. gilt für jede Klasse S von σ-Strukturen und jede Klasse $\mathsf{C} \subseteq \mathsf{S}$:

$$\mathsf{C} \text{ ist Hanf-lokal in } \mathsf{S} \implies \mathsf{C} \text{ ist FO-definierbar in } \mathsf{S}\ ?$$

Belegen Sie Ihre Antwort, indem Sie entweder beweisen, dass die Umkehrung gilt, oder indem Sie ein Gegenbeispiel angeben.

Aufgabe 3: (25 Punkte)

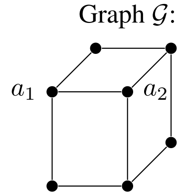
In dieser Aufgabe wird die Notation aus Aufgabe 4 von Blatt 1 benutzt.

Beweisen Sie das so genannte *Kompositionslemma*, d.h. zeigen Sie, dass Folgendes gilt:
Ist $m \in \mathbb{N}$ mit $m \geqslant 2$, und sind w_1, w_2, u_1, u_2 nicht-leere Wörter über dem Alphabet $\Sigma = \{a, b\}$ mit $\mathfrak{A}_{w_1} \approx_m \mathfrak{A}_{w_2}$ und $\mathfrak{A}_{u_1} \approx_m \mathfrak{A}_{u_2}$, so gilt für $n_1 := |w_1|$ und $n_2 := |w_2|$, dass Duplicator eine Gewinnstrategie im Spiel $\mathcal{G}_m(\mathfrak{A}_{w_1u_1}, n_1, \mathfrak{A}_{w_2u_2}, n_2)$ hat.

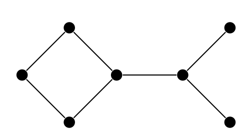
Aufgabe 4: (25 Punkte)

Betrachten Sie die folgenden Graphen $\mathcal{G} := (V^{\mathcal{G}}, E^{\mathcal{G}})$ und $\mathcal{H} := (V^{\mathcal{H}}, E^{\mathcal{H}})$.

Graph $\mathcal{G}$:



Graph $\mathcal{H}$:



— auf der nächsten Seite geht's weiter —

(a) Finden Sie $b_1, b_2 \in V^{\mathcal{H}}$, so dass $a_1, a_2 \mapsto b_1, b_2 \in \text{Part}(\mathcal{G}, \mathcal{H})$.

(b) Was ist das größte m, so dass es $b_1, b_2 \in V^{\mathcal{H}}$ gibt mit $(\mathcal{G}, a_1, a_2) \cong_m (\mathcal{H}, b_1, b_2)$? Belegen Sie Ihre Aussage, indem Sie für ihre Zahl m geeignete Elemente $b_1, b_2 \in V^{\mathcal{H}}$ und ein Hin- und Her-System $(I_j)_{j \leqslant m} \colon (\mathcal{G}, a_1, a_2) \cong_m (\mathcal{H}, b_1, b_2)$ angeben.

(c) Beweisen Sie, dass ein größeres als das von Ihnen angegebene m nicht möglich ist.