Goethe-Universität Frankfurt am Main
Institut für Informatik
Theorie komplexer Systeme
Prof. Dr. Nicole Schweikardt

10. November 2009

Logik in der Informatik

Wintersemester 2009 / 2010

Übungsblatt 4

Zu bearbeiten bis Dienstag, 17. November 2009

Aufgabe 1: (20 Punkte)

Sei $\sigma := \{P, Q\}$ für einstellige Relationssymbole P und Q. Für $k, \ell \in \mathbb{N}_{\geqslant 1}$ sei $\mathfrak{A}_{k,\ell}$ eine σ-Struktur mit Universum $A_{k,\ell} = P^{\mathfrak{A}_{k,\ell}} \cup Q^{\mathfrak{A}_{k,\ell}}$, wobei $P^{\mathfrak{A}_{k,\ell}} \cap Q^{\mathfrak{A}_{k,\ell}} = \emptyset$, $|P^{\mathfrak{A}_{k,\ell}}| = k$ und $|Q^{\mathfrak{A}_{k,\ell}}| = \ell$ ist. Zeigen Sie, dass $\mathfrak{A}_{k_0,\ell_0} \equiv_m \mathfrak{A}_{k_1,\ell_1}$ genau dann gilt, wenn

$$(k_0 = k_1 \text{ oder } k_0, k_1 \geqslant m) \quad \text{und} \quad (\ell_0 = \ell_1 \text{ oder } \ell_0, \ell_1 \geqslant m).$$

Aufgabe 2: (30 Punkte)

(a) Sei RGraphs die Klasse aller endlichen Graphen $G = (V, E^G, s^G, t^G)$ mit $s^G,\ t^G \in V$. Sei Reach die Klasse aller Graphen $G \in$ RGraphs, in denen es einen Pfad vom Knoten s^G zum Knoten t^G gibt.

Verwenden Sie die Methode der logischen Reduktionen, um Folgendes zu zeigen: Reach ist nicht FO-definierbar in RGraphs.

(b) Sei Ham die Klasse aller endlichen Graphen, die einen Hamiltonkreis enthalten. Zeigen Sie: Ham ist nicht FO-definierbar in der Klasse Graphs aller endlichen Graphen.

Zur Erinnerung: Ein Hamiltonkreis ist ein Kreis, der jeden Knoten genau einmal durchläuft.

(c) Sei Azyklisch die Klasse aller endlichen ungerichteten Graphen, die keinen Kreis enthalten. Zeigen Sie: Azyklisch ist nicht FO-definierbar in der Klasse UGraphs aller endlichen ungerichteten Graphen.

Aufgabe 3: (25 Punkte)

Sei σ eine Funktionen-freie Signatur und seien $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ zwei σ-Strukturen.

- Die Struktur $\mathfrak{A} \times \mathfrak{B}$ ist die σ-Struktur mit Universum $A \times B$, Konstanten $c^{\mathfrak{A}\times\mathfrak{B}} := (c^{\mathfrak{A}}, c^{\mathfrak{B}})$ (f.a. Konstantensymbole $c \in \sigma$) und Relationen

  $$R^{\mathfrak{A}\times\mathfrak{B}} \ := \ \big\{ \big((a_1, b_1), \ldots, (a_r, b_r)\big) \ : \ (a_1, \ldots, a_r) \in R^{\mathfrak{A}} \text{ und } (b_1, \ldots, b_r) \in R^{\mathfrak{B}} \big\}$$

  (f.a. Relationssymbole $R \in \sigma$ mit $r := ar(R)$).

- Falls σ keine Konstantensymbole enthält und A und B disjunkt sind, so ist $\mathfrak{A} \sqcup \mathfrak{B}$ die σ-Struktur mit Universum $A \cup B$ und Relationen $R^{\mathfrak{A}\sqcup\mathfrak{B}} := R^{\mathfrak{A}} \cup R^{\mathfrak{B}}$ (f.a. $R \in \sigma$).

— auf der nächsten Seite geht's weiter —

Es sei $m \in \mathbb{N}$, und $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$, $\mathfrak{B}_1$, $\mathfrak{B}_2$ seien σ-Strukturen.

Nutzen Sie die EF-Spiel-Charakterisierung von $\equiv_m$, um Folgendes zu zeigen:

(a) Falls $\mathfrak{A}_1 \equiv_m \mathfrak{B}_1$ und $\mathfrak{A}_2 \equiv_m \mathfrak{B}_2$, so auch $\mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{A}_2 \equiv_m \mathfrak{B}_1 \times \mathfrak{B}_2$.

(b) Falls σ keine Konstantensymbole enthält und $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ und $B_1 \cap B_2 = \emptyset$ ist, so gilt: Falls $\mathfrak{A}_1 \equiv_m \mathfrak{B}_1$ und $\mathfrak{A}_2 \equiv_m \mathfrak{B}_2$, so auch $\mathfrak{A}_1 \sqcup \mathfrak{A}_2 \equiv_m \mathfrak{B}_1 \sqcup \mathfrak{B}_2$.

Aufgabe 4: (25 Punkte)

Sei $\sigma := \{S_v, S_h\}$ mit zwei 2-stelligen Relationssymbolen S_v und S_h. Für $k, \ell \in \mathbb{N}_{\geqslant 1}$ ist das $(k \times \ell)$-*Gitter* $\mathfrak{G}_{k,\ell}$ die σ-Struktur mit Universum $\{1, \ldots, k\} \times \{1, \ldots, \ell\}$ und Relationen

$$\begin{aligned} S_v^{\mathfrak{G}_{k,\ell}} &:= \big\{ \big((i,j),(i{+}1,j)\big) \,:\, 1 \leqslant i < k,\ 1 \leqslant j \leqslant \ell \big\}, \\ S_h^{\mathfrak{G}_{k,\ell}} &:= \big\{ \big((i,j),(i,j{+}1)\big) \,:\, 1 \leqslant i \leqslant k,\ 1 \leqslant j < \ell \big\}. \end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass es keinen FO$[\sigma]$-Satz φ gibt, so dass für alle $k, \ell \in \mathbb{N}_{\geqslant 1}$ gilt:

$$\mathfrak{G}_{k,\ell} \models \varphi \iff k = \ell.$$

Hinweis: Benutzen Sie Aufgabe 3.