Goethe-Universität Frankfurt am Main
Institut für Informatik
Theorie komplexer Systeme
Prof. Dr. Nicole Schweikardt

3. November 2009

Logik in der Informatik

Wintersemester 2009 / 2010

Übungsblatt 3

Zu bearbeiten bis Dienstag, 10. November 2009

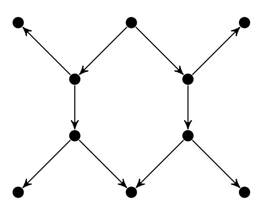
Aufgabe 1: (25 Punkte)

Sei σ eine relationale Signatur.
Zeigen Sie, dass es für jede FO$[\sigma]$-Formel φ eine zu φ äquivalente FO$[\sigma]$-Formel $\tilde{\varphi}$ mit $\mathit{frei}(\tilde{\varphi}) = \mathit{frei}(\varphi)$ gibt, in der höchstens $\mathit{br}(\varphi)$ viele verschiedene Variablen vorkommen.

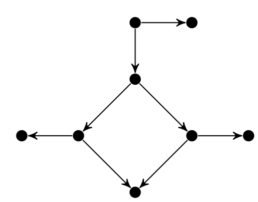
Aufgabe 2: (25 Punkte)

Betrachten Sie die folgenden Graphen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$:

Graph $\mathfrak{A}$:



Graph $\mathfrak{B}$:



(a) Welches ist das kleinste m, so dass Spoiler eine Gewinnstrategie im m-Runden Ehrenfeucht-Fraïssé Spiel auf $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ hat? (Begründen Sie Ihre Antwort.)

(b) Finden Sie für Ihre Antwort m aus Teil (a) einen FO$[\{E\}]$-Satz ψ der Quantorentiefe m, so dass $\mathfrak{A} \models \psi$ und $\mathfrak{B} \models \neg\psi$.

Aufgabe 3: (25 Punkte)

Beweisen Sie Satz 4.8, d.h. zeigen Sie:
Für alle Funktionen-freien Signaturen σ, alle σ-Strukturen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$, alle $k \in \mathbb{N}$, alle Tupel $\vec{a}' := (a'_1, \ldots, a'_k) \in A^k$ und $\vec{b}' := (b'_1, \ldots, b'_k) \in B^k$ und alle $m \in \mathbb{N}$ gilt:

> Genau einer der beiden Spieler (Spoiler bzw. Duplicator) hat eine Gewinnstrategie im Spiel $\mathcal{G}_m(\mathfrak{A}, \vec{a}', \mathfrak{B}, \vec{b}')$.

Hinweis: Per Induktion nach m ist der Beweis einfach und kurz.

Aufgabe 4: (25 Punkte)

Beweisen Sie die Richtung "$\Longrightarrow$" von Satz 4.11, d.h. zeigen Sie:
Für jedes $m \geqslant 1$ und für alle geordneten endlichen Strukturen $\mathfrak{A} = (A, \leqslant^{\mathfrak{A}}, \mathit{min}^{\mathfrak{A}}, \mathit{max}^{\mathfrak{A}})$ und $\mathfrak{B} = (B, \leqslant^{\mathfrak{B}}, \mathit{min}^{\mathfrak{B}}, \mathit{max}^{\mathfrak{B}})$ gilt: Falls $|A| < |B|$ und $|A| \leqslant 2^m$, so hat *Spoiler* eine Gewinnstrategie im m-Runden EF-Spiel auf $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$.