Goethe-Universität Frankfurt am Main
Institut für Informatik
Theorie komplexer Systeme
Prof. Dr. Nicole Schweikardt

20. Oktober 2009

Logik in der Informatik

Wintersemester 2009 / 2010

Übungsblatt 1

Zu bearbeiten bis Dienstag, 27. Oktober 2009

Aufgabe 1: (20 Punkte)

Geben Sie FO$[\sigma_{Ar}]$-Formeln an, die im Standardmodell $\mathcal{N}$ der Arithmetik folgende intuitive Bedeutung haben:

(a) Es gibt unendlich viele Primzahlen $p \in \mathbb{N}$, so dass $p = 3m + 2$ für eine Zahl $m \in \mathbb{N}$.

(b) $\sqrt{2}$ ist irrational, d.h. es gibt keine Zahlen $m, n \in \mathbb{N}$ mit $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$.

(c) Jede zusammengesetzte Zahl $n \in \mathbb{N}$ besitzt einen Teiler $m \in \mathbb{N}$ mit $m \leqslant \sqrt{n}$.

Aufgabe 2: (25 Punkte)

Sei σ eine Signatur, die aus endlich vielen Symbolen besteht, und sei $\mathfrak{A}$ eine beliebige σ-Struktur, deren Universum A endlich ist.

- Geben Sie einen FO$[\sigma]$-Satz $\varphi_{\mathfrak{A}}$ an, der die Struktur $\mathfrak{A}$ bis auf Isomorphie eindeutig beschreibt. D.h. es soll für alle σ-Strukturen $\mathfrak{B}$ gelten: $\mathfrak{B} \models \varphi_{\mathfrak{A}} \iff \mathfrak{B} \cong \mathfrak{A}$.
- Beweisen Sie, dass ihre Formel $\varphi_{\mathfrak{A}}$ die in (a) geforderte Eigenschaft tatsächlich besitzt. D.h. zeigen Sie, dass für alle σ-Strukturen $\mathfrak{B}$ gilt: $\mathfrak{B} \models \varphi_{\mathfrak{A}} \iff \mathfrak{B} \cong \mathfrak{A}$.

Aufgabe 3: (25 Punkte)

Beweisen Sie das Isomorphielemma (Satz 1.36 aus der Vorlesung).

Aufgabe 4: (30 Punkte)

Sei $\sigma = \{\leqslant, P_a, P_b\}$ die Signatur, die aus dem 2-stelligen Relationssymbol $\leqslant$ sowie zwei 1-stelligen Relationssymbolen P_a und P_b besteht.
Einem endlichen Wort $w = w_1 \cdots w_n$ der Länge $n \geqslant 1$ über dem Alphabet $\Sigma := \{a, b\}$ ordnen wir die folgende σ-Struktur $\mathfrak{A}_w = (A_w, \leqslant^{\mathfrak{A}_w}, P_a^{\mathfrak{A}_w}, P_b^{\mathfrak{A}_w})$ zu:

- $A_w := \{1, \ldots, n\}$,
- $\leqslant^{\mathfrak{A}_w}$ ist die natürliche lineare Ordnung auf $\{1, \ldots, n\}$,
- $P_a^{\mathfrak{A}_w} := \{\, i \in A_w \,:\, w_i = a \,\}$,
- $P_b^{\mathfrak{A}_w} := \{\, i \in A_w \,:\, w_i = b \,\}$.

Ein FO$[\sigma]$-Satz φ *beschreibt* eine Sprache $L \subseteq \Sigma^*$, falls für jedes nicht-leere Wort $w \in \Sigma^*$ gilt: $w \in L \iff \mathfrak{A}_w \models \varphi$.

— auf der nächsten Seite geht's weiter —

(a) Welche Sprache beschreibt der folgende FO[σ]-Satz φ_0?

$$\varphi_0 \;:=\; \exists x\, \exists y \Big(x \leqslant y \wedge \neg x{=}y \wedge \forall z \big(x \leqslant z \rightarrow (x{=}z \vee y \leqslant z) \big) \wedge P_a(x) \wedge P_b(y) \Big)$$

(b) Geben Sie einen FO[σ]-Satz an, der die durch den regulären Ausdruck $(a|b)b(a|b)^*ba^*$ definierte Sprache beschreibt.

(c) Können Sie auch einen FO[σ]-Satz finden, der die Sprache aller Worte beschreibt, in denen die Anzahl der in ihnen vorkommenden as gerade ist?
Falls ja, geben Sie den Satz an; falls nein, versuchen Sie zu erklären, warum es keinen solchen Satz zu geben scheint.