

Diskrete Modellierung

Wintersemester 2009/2010

Übungsblatt 13

Abgabe: bis 10. Februar 2010, 8.15 Uhr (vor der Vorlesung oder in Raum RM 11-15/113)

Aufgabe 1: (28 Punkte)

(a) Gegeben seien die folgenden regulären Ausdrücke

$$R_1 = aa^*|c$$

$$R_2 = (b|aa)^*c$$

$$R_3 = (a^*(\varepsilon|b)c^*)^*$$

(i) Gehören die folgenden Worte zur Sprache $L(R_1)$, $L(R_2)$ bzw. $L(R_3)$?

$$w_1 = c$$

$$w_2 = aac$$

$$w_3 = baaac$$

$$w_4 = cbba$$

(ii) Geben Sie das kürzeste Wort w an, so dass $w \in L(R_1)$ und $w \notin L(R_2)$.

(iii) Beschreiben Sie die Sprachen $L(R_1)$, $L(R_2)$ und $L(R_3)$ jeweils umgangssprachlich.

(iv) Geben Sie einen DFA mit möglichst wenigen Zuständen in graphischer Darstellung an, der die Sprache $L(R_2)$ akzeptiert.

(b) Geben Sie für die folgenden Sprachen je einen möglichst kurzen regulären Ausdruck an, der die Sprache beschreibt.

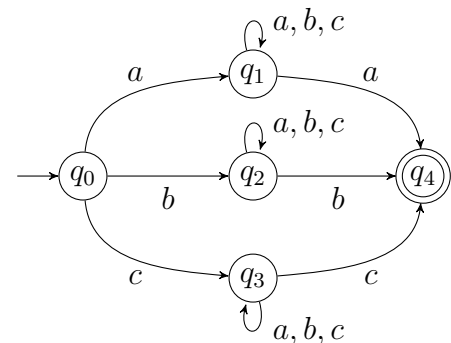
(i) $L_1 := \{w \in \{a, b\}^* : w \text{ beginnt mit } b \text{ und hat genau die Länge fünf}\}$

(ii) $L_2 := \{w \in \{a, b\}^* : |w| \text{ ist gerade und besteht nur aus } a\text{'s oder nur aus } b\text{'s}\}$

(iii) $L_3 := \{w \in \{a, b\}^* : \text{in } w \text{ kommen keine drei } a\text{'s hintereinander vor}\}$

(c) Betrachten Sie den abgebildeten NFA A über dem Eingabealphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$.

Geben Sie einen DFA A' in graphischer Darstellung an, mit $L(A') = L(A)$. Wandeln sie dazu den NFA A mit Hilfe der Potenzmengenkonstruktion in einen DFA A' um. Berücksichtigen Sie dabei nur solche Zustände von A' , die vom Startzustand $q'_0 := \{q_0\}$ aus erreicht werden können.



Aufgabe 2: (25 Punkte)

Welche der Sprachen L_1 , L_2 und L_3 sind regulär, welche nicht? Beweisen Sie Ihre Antwort jeweils mit Hilfe des Pumping-Lemmas oder durch die Angabe eines endlichen Automaten.

(a) $L_1 := \{b^n a^{(2^n)} : n \in \mathbb{N}\}$

(b) $L_2 := \{a^{(2^n)} : n \in \mathbb{N}\}$

(c) $L_3 := \{a^{(2^n)} : n \in \mathbb{N}\}$

Aufgabe 3: (20 Punkte)

Im Folgenden wird die Bildungsvorschrift für die Sprache PBA der *positiven Booleschen Ausdrücke* wiederholt, die Ihnen schon von Übungsblatt 9 bekannt ist. Die Menge PBA ist die Menge der Wörter über dem Alphabet $A = \{\mathbf{0}, \mathbf{1}, \wedge, \vee, (\,)\}$, die rekursiv wie folgt definiert ist:

Basisregel: (B) Die Symbole $\mathbf{0}$ und $\mathbf{1}$ sind in PBA.

Rekursive Regeln: (R1) Sind w_1 und w_2 in PBA, so ist auch $(w_1 \wedge w_2)$ in PBA.

(R2) Sind w_1 und w_2 in PBA, so ist auch $(w_1 \vee w_2)$ in PBA.

Geben Sie eine kontextfreie Grammatik G an, so dass $L(G) = \text{PBA}$ ist. Geben Sie außerdem einen Ableitungsbaum für das folgende Wort an:

$$(((\mathbf{0} \vee \mathbf{0}) \vee (\mathbf{1} \vee \mathbf{0})) \wedge (\mathbf{0} \vee \mathbf{1}))$$

Aufgabe 4:

(27 Punkte)

Auf Madagaskar ist kürzlich eine neue Schildkrötenart entdeckt worden, die von der Fachwelt schnell den Namen Kompass-Schildkröte erhalten hat. Die erstaunliche und namensgebende Fähigkeit dieser Tiere zeigt sich, sobald man einer solchen Schildkröte (vorsichtig!) mit Kreide ein Wort x über dem Alphabet $\Sigma := \{n, s, o, w\}$ auf den Rückenpanzer schreibt und sie auf die Erde setzt. Für jedes Zeichen in x gelesen von links nach rechts läuft die Schildkröte genau einen Meter in eine bestimmte Richtung: Für n läuft sie nach Norden, für s nach Süden, für o nach Osten und nach Westen für w . Danach bleibt die Schildkröte stehen, das Wort verschwindet und die Schildkröte wartet auf das nächste.

Wird der Schildkröte beispielsweise das Wort *nosoonw* auf den Rückenpanzer geschrieben und sie bei Position P auf den Boden gesetzt, so läuft sie den in Abbildung 1 gezeichneten Weg ab.

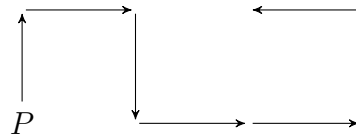


Abbildung 1

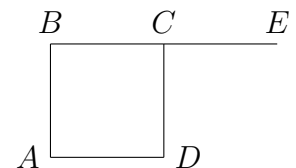


Abbildung 2

(a) Betrachten Sie die folgende Grammatik $G_2 = (T_2, N_2, S_2, P_2)$ mit $T_2 = \{o, w\}$, $N_2 = \{S, O, W\}$, $S_2 = S$ und

$$P_2 = \{ S \rightarrow oW, S \rightarrow wO, S \rightarrow \varepsilon, O \rightarrow oS, O \rightarrow wOO, W \rightarrow wS, W \rightarrow oWW \}$$

(i) Überprüfen Sie für jedes der folgenden Worte, ob es in der von G_2 erzeugten Sprache liegt. Wenn ja, geben Sie eine schrittweise Ableitung analog zu Beispiel 8.4. für dieses Wort an; ansonsten begründen Sie, warum das Wort nicht zur Sprache gehört.

$$w_1 = wO \quad w_2 = owwo \quad w_3 = o \quad w_4 = wwowoo$$

(ii) Beschreiben Sie, welche Sprache $L(G_2)$ von der Grammatik G_2 erzeugt wird. Welches Verhalten zeigt eine Kompass-Schildkröte, wenn ihr ein beliebiges Wort aus $L(G_2)$ auf den Rückenpanzer geschrieben wird?

(b) Betrachten Sie Abbildung 2 mit den Positionen A, B, C, D und E . Die Länge einer Linie zwischen zwei benachbarten Positionen betrage genau ein Meter. Eine Kompass-Schildkröte soll nun auf Position A ausgesetzt werden, die eingezeichneten Linien nicht verlassen und am Ende wieder auf Position A stehen. Dementsprechend können der Schildkröte beispielsweise die Wörter *ow* oder *noows* auf den Rücken geschrieben werden, nicht aber *wo* oder *onw*. Geben Sie eine kontextfreie Grammatik G an, die genau die Wörter über Σ erzeugt, die einer Kompass-Schildkröte unter diesen Bedingungen auf den Rückenpanzer geschrieben werden können.

Hinweis: Nutzen Sie für jede der Positionen in der Abbildung ein eigenes Nichtterminalsymbol. Beschreiben Sie jede mögliche Richtung, die von jedem dieser Punkte aus jeweils möglich ist durch eine Regel der Grammatik.