Goethe-Universität Frankfurt am Main
Institut für Informatik
Theorie komplexer Systeme
Prof. Dr. Nicole Schweikardt

20. Januar 2010

# Diskrete Modellierung

Wintersemester 2009/2010

# Übungsblatt 11

**Abgabe:** *bis 27. Januar 2010, 8.15 Uhr (vor der Vorlesung oder in Raum RM 11-15/113)*

**Aufgabe 1:** **(30 Punkte)**

Sei $\sigma = \{\dot{R}, \dot{f}, \dot{c}\}$ eine Signatur mit einem 2-stelligen Relationssymbol $\dot{R}$, einem 1-stelligen Funktionssymbol $\dot{f}$ und einem Konstantensymbol $\dot{c}$.

**(a)** Bestimmen Sie für jede der folgenden FO[$\sigma$]-Formeln, welche Variablen frei und welche Variablen gebunden in der Formel vorkommen.

**(i)** $\dot{f}(\dot{c}) \doteq \dot{c}$

**(ii)** $\forall y\, \dot{R}(x, y)$

**(iii)** $\forall y \exists y \left( \dot{R}(x, y) \vee \dot{R}(y, x) \right)$

**(iv)** $\exists x \left( \dot{R}(z, y) \leftrightarrow \forall y\, \dot{f}(x, y) \doteq z \right)$

**(v)** $\left( \forall y\, \dot{f}(y) \doteq \dot{c} \vee \exists x\, \dot{R}(x, y) \right)$

**(vi)** $\forall x\, \forall y \left( (\dot{R}(\dot{c}, x) \wedge \dot{R}(y, \dot{c})) \rightarrow \dot{R}(\dot{c}, z) \right)$

**(b)** Betrachten Sie die $\sigma$-Struktur $\mathfrak{A} = (A, \dot{R}^{\mathfrak{A}}, \dot{f}^{\mathfrak{A}}, \dot{c}^{\mathfrak{A}})$, wobei $A = \{1, 3, 5, 7, 8, 9\}$, $\dot{R}^{\mathfrak{A}} = \{(1, 3), (1, 5), (5, 1), (5, 8), (9, 9)\}$ und $\dot{c}^{\mathfrak{A}} = 1$ gilt. Weiterhin sei $\dot{f}^{\mathfrak{A}} : A \rightarrow A$, definiert durch

| $x$ | 1 | 3 | 5 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\dot{f}^{\mathfrak{A}}(x)$ | 9 | 8 | 7 | 5 | 3 | 1 |

Sei $\mathcal{I} = (\mathfrak{A}, \beta)$ die $\sigma$-Interpretation mit der Belegung $\beta : \text{Var} \rightarrow A$, für die gilt:

$$\beta(v_0) = 3,\ \beta(v_1) = 1,\ \beta(v_2) = 9,\ \text{ und } \beta(v_i) = 5 \text{ für alle } i \geq 3.$$

Berechnen Sie $[\![t_1]\!]^{\mathcal{I}}$ für den $\sigma$-Term $t_1$ analog zu Beispiel 6.23 aus dem Skript. Berechnen Sie weiterhin $[\![\varphi_1]\!]^{\mathcal{I}}$ und $[\![\varphi_2]\!]^{\mathcal{I}}$ für die FO[$\sigma$]-Formeln $\varphi_1$ und $\varphi_2$ analog zu Beispiel 6.26 im Skript.

**(i)** $t_1 := \dot{f}(\dot{f}(v_0))$

**(ii)** $\varphi_1 := \left( \dot{R}(v_6, v_2) \rightarrow \dot{R}(v_2, v_2) \right)$

**(iii)** $\varphi_2 := \forall v_4 \left( (\dot{R}(\dot{c}, v_4) \vee \dot{R}(v_3, v_4)) \wedge \exists v_0\, \neg \dot{f}(v_0) \doteq v_4 \right)$

**Aufgabe 2:** **(22 Punkte)**

**(a)** Welche der folgenden Aussagen sind korrekt, welche nicht? (Sie brauchen Ihre Antwort nicht zu begründen.)

**(i)** $\exists x \varphi \models \forall x \varphi$

**(ii)** $\forall x \varphi \models \exists x \varphi$

**(iii)** $\forall x (\varphi \vee \psi) \models (\forall x \varphi \vee \forall x \psi)$

**(iv)** $(\forall x \varphi \vee \forall x \psi) \models \forall x (\varphi \vee \psi)$

**(v)** $(\forall x \varphi \vee \forall x \psi) \equiv \forall x (\varphi \vee \psi)$

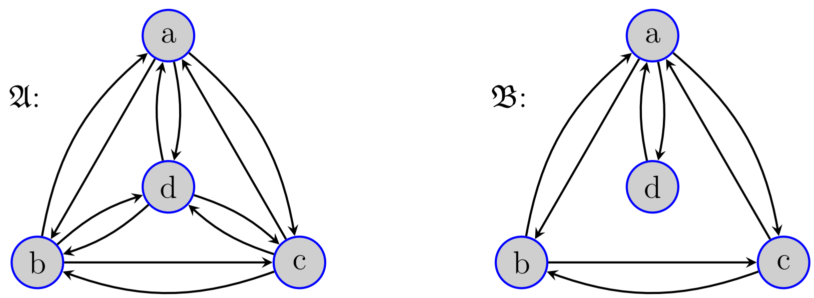
**(b)** Beweisen Sie, dass Ihre Antworten zu (iii) und (iv) aus (a) korrekt sind.

**(c)** Zeigen Sie die Korrektheit der Beobachtung 6.33 (c) aus dem Skript, d.h. zeigen Sie, dass für jede Signatur $\sigma$ und zwei beliebiege FO[$\sigma$]-Formeln $\varphi$ und $\psi$ gilt:

$$\varphi \models \psi \quad\iff\quad (\varphi \to \psi) \text{ ist allgemeingültig.}$$

## Aufgabe 3: **(20 Punkte)**

**(a)** Sei $\sigma = \{\dot{E}\}$ eine Signatur mit einem 2-stelligen Relationssymbol $\dot{E}$. Betrachten Sie die beiden $\sigma$-Strukturen $\mathfrak{A} = (A, \dot{E}^{\mathfrak{A}})$ und $\mathfrak{B} = (A, \dot{E}^{\mathfrak{B}})$, die durch die beiden folgenden Graphen repräsentiert werden.




Geben Sie einen FO[$\sigma$]-Satz $\varphi$ an, so dass $\mathfrak{A} \models \varphi$ und $\mathfrak{B} \models \neg\varphi$ gilt.

**(b)** Sei $\sigma = \{\dot{E}\}$ eine Signatur mit einem 2-stelligen Relationssymbol $\dot{E}$. Geben Sie für die Formel

$$\varphi(x) := \forall y \exists z \Big( (\dot{E}(y,x) \to \dot{E}(x,z)) \lor x \doteq y \Big)$$

eine Struktur $\mathfrak{A}$ und zwei Interpretationen $\mathcal{I}_1 = (\mathfrak{A}, \beta_1)$ und $\mathcal{I}_2 = (\mathfrak{A}, \beta_2)$ an, so dass $\mathcal{I}_1 \models \varphi$ und $\mathcal{I}_2 \models \neg\varphi$ gilt.

## Aufgabe 4: **(28 Punkte)**

Betrachten Sie die Kinodatenbank $\mathfrak{A}_{\text{Kino}}$ aus der Vorlesung.

**(a)** Geben Sie für die folgenden Anfragen jeweils eine Formel $\varphi$ der Logik erster Stufe an, die die Anfrage beschreibt. Berechnen Sie jeweils auch die Relation $\varphi(\mathfrak{A}_{\text{Kino}})$.

- **(i)** Geben Sie die Telefonnummern der Kinos aus, die um 20:15 Uhr oder um 20:30 Uhr eine Vorstellung haben.
- **(ii)** Geben Sie alle Filme aus, die in der Datenbank mit mindestens drei verschiedenen Schauspielern geführt werden.
- **(iii)** Geben Sie alle Regisseure aus, die in einem Film Regie geführt haben, der gerade nicht im Kino läuft.
- **(iv)** Geben Sie alle Filme aus, die nur in einem einzelnen Kino gespielt werden, zusammen mit den Anfangszeiten des jeweiligen Filmes.

**(b)** Berechnen Sie für jede der folgenden Formeln $\varphi_i$ die Relation $\varphi_i(\mathfrak{A}_{\text{Kino}})$ und geben Sie umgangssprachlich an, welche Anfrage durch die Formel $\varphi_i$ beschrieben wird.

- **(i)** $$\varphi_1(x_{\text{T}}) = \Big( \exists x_{\text{Z}}\, \dot{\mathit{Progamm}}(\dot{\text{‘Filmpalast Berlin’}}, x_{\text{T}}, x_{\text{Z}}) \\ \land \neg\exists x_{\text{Z}}\, \dot{\mathit{Programm}}(\dot{\text{‘Kino in der Kulturbrauerei’}}, x_{\text{T}}, x_{\text{Z}}) \Big)$$
- **(ii)** $$\varphi_2(x_{\text{K}}, x_{\text{A}}) = \exists x_{\text{Tel}}\, \exists x_Z \Big( \dot{\mathit{Orte}}(x_{\text{K}}, x_{\text{A}}, x_{\text{Tel}}) \land \dot{\mathit{Programm}}(x_{\text{K}}, \dot{\text{‘Capote’}}, x_{\text{Z}}) \Big)$$
- **(iii)** $$\varphi_3(x_{\text{K}}, x_{\text{Z}}) = \Big( \exists x_{\text{T}}\, \dot{\mathit{Programm}}(x_{\text{K}}, x_T, x_Z) \land \forall y_{\text{T}} \forall y_{\text{Z}} \Big( \dot{\mathit{Programm}}(x_{\text{K}}, y_T, y_Z) \to \\ \neg\exists x_{\text{S}} \exists x_{\text{R}} \Big( \dot{\mathit{Filme}}(y_{\text{T}}, x_{\text{R}}, x_{\text{S}}) \\ \land (x_{\text{S}} \doteq \dot{\text{‘George Clooney’}} \lor x_{\text{R}} \doteq \dot{\text{‘George Clooney’}}) \Big) \Big) \Big)$$