Goethe-Universität Frankfurt am Main
Institut für Informatik
Theorie komplexer Systeme
Prof. Dr. Nicole Schweikardt 13. Januar 2010

Diskrete Modellierung

Wintersemester 2009/2010

Übungsblatt 10

Abgabe: *bis 20. Januar 2010, 8.15 Uhr (vor der Vorlesung oder in Raum RM 11-15/113)*

Aufgabe 1: **(28 Punkte)**

Sophie, Marie und Lena nehmen im Internet an einer Auktion teil. Die Auktion dauert zehn Runden und in jeder Runde gibt es genau einen Höchstbietenden. Der Höchstbietende der zehnten Runde gewinnt die Auktion. Den Verlauf dieser Auktion modellieren wir wie folgt.

Sei $\sigma := \{\dot{S}, \dot{M}, \dot{L}, \dot{Nachfolger}, \dot{Endrunde}\}$ eine Signatur, wobei $\dot{S}, \dot{M}, \dot{L}$ 1-stellige Relationssymbole, $\dot{Nachfolger}$ ein 1-stelliges Funktionssymbol und $\dot{Endrunde}$ ein Konstantensymbol ist. Sei $\mathfrak{A}$ eine σ-Struktur mit $\mathfrak{A} = (A, \dot{S}^{\mathfrak{A}}, \dot{M}^{\mathfrak{A}}, \dot{L}^{\mathfrak{A}}, \dot{Nachfolger}^{\mathfrak{A}}, \dot{Endrunde}^{\mathfrak{A}})$ wobei $A := \{1, \ldots, 10\}$ und $\dot{Endrunde}^{\mathfrak{A}} := 10$. Außerdem gilt für alle $a \in A$:

- $a \in \dot{S}^{\mathfrak{A}} \iff$ Sophie ist in Runde a die Höchstbietende
- $a \in \dot{M}^{\mathfrak{A}} \iff$ Marie ist in Runde a die Höchstbietende
- $a \in \dot{L}^{\mathfrak{A}} \iff$ Lena ist in Runde a die Höchstbietende
- $\dot{Nachfolger}^{\mathfrak{A}}(a) := \begin{cases} a+1, & \text{falls } a \in \{1, \ldots, 9\} \\ a, & \text{falls } a = 10. \end{cases}$

So sagt beispielsweise die FO[σ]-Formel $\varphi = \forall x(\dot{S}(x) \vee \dot{M}(x))$ aus, dass in jeder Runde Sophie oder Marie die Höchstbietende ist.

(a) Geben Sie möglichst kurze FO[σ]-Formeln an, die in $\mathfrak{A}$ folgendes aussagen:

- **(i)** Lena gewinnt die Auktion.
- **(ii)** Sophie ist in mindestens einer Runde die Höchstbietende.
- **(iii)** Lena ist in der neunten Runde die Höchstbietende.
- **(iv)** Ist Marie in keiner der ersten neun Runden die Höchstbietende, so gewinnt sie auch nicht die Auktion.

(b) Beschreiben Sie umgangssprachlich, was die folgenden FO[σ]-Formeln aussagen

- **(i)** $\forall x\Big(\neg\big(\dot{L}(x) \vee \dot{S}(x)\big) \to \dot{M}(x)\Big)$
- **(ii)** $\forall x\Big(\big(\neg \dot{Nachfolger}(x) \doteq x \wedge \dot{S}(x)\big) \to \dot{L}(\dot{Nachfolger}(x))\Big)$
- **(iii)** $\neg\exists x\Big(\ \dot{M}(x)\ \wedge\ \Big(\ \dot{M}(\dot{Nachfolger}(x))\ \wedge\ \Big(\ \dot{M}(\dot{Nachfolger}(\dot{Nachfolger}(x)))\ \wedge\ \neg \dot{Nachfolger}(x) \doteq \dot{Endrunde}\ \Big)\ \Big)\ \Big)$

Aufgabe 2: **(26 Punkte)**

Sei $\sigma := \{\dot{f}, \dot{Q}, \dot{R}, \dot{c}\}$ eine Signatur mit einem 1-stelligen Funktionssymbol $\dot{f}$, einem 3-stelligen Relationssymbol $\dot{Q}$, einem 2-stelligen Relationssymbol $\dot{R}$ und einem Konstantensymbol $\dot{c}$.

(a) Überprüfen Sie für jedes der folgenden Wörter, ob es sich jeweils um einen σ-Term (gemäß Definition 6.13), um eine atomare σ-Formel bzw. um eine FO[σ]-Formel (gemäß Definition 6.15) handelt. Begründen Sie gegebenenfalls, warum ein Wort kein σ-Term, keine atomare σ-Formel bzw. keine FO[σ]-Formel darstellt.

(i) $\dot{Q}\Big(\dot{f}(v_1), v_4, \dot{c}\Big)$

(ii) $\dot{R}\Big(\dot{f}(v_1), v_4, \dot{c}\Big)$

(iii) $\Big(\dot{f}(v_7) \leftrightarrow \dot{R}(v_1, v_2)\Big)$

(iv) $\exists v_9\, \dot{f}\Big(\dot{f}(\dot{f}(\dot{c}))\Big) \dot{=} \dot{f}(v_8)$

(v) $\forall v_9\, \dot{f}\Big(\dot{f}(\dot{f}(\dot{c}))\Big) \dot{=} \dot{f}(v_8 \wedge v_9)$

(vi) $\exists v_1 \forall v_2 \forall v_4 \Big(\dot{c} \dot{=} \dot{f}(v_4) \vee \forall v_2 (\dot{R}(\dot{f}(v_1), v_4) \rightarrow \dot{Q}(v_1, v_3, v_4))\Big)$

(b) Betrachten Sie die σ-Strukturen $\mathfrak{A} = (A, \dot{f}^{\mathfrak{A}}, \dot{Q}^{\mathfrak{A}}\, R^{\mathfrak{A}}, \dot{c}^{\mathfrak{A}})$ und $\mathfrak{B} = (B, \dot{f}^{\mathfrak{B}}, \dot{Q}^{\mathfrak{B}}, \dot{R}^{\mathfrak{B}}, \dot{c}^{\mathfrak{B}})$ wobei

- $A := \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $\dot{Q}^{\mathfrak{A}} := \{(2, 2, 4), (5, 3, 1)\}$, $\dot{R}^{\mathfrak{A}} := \{(3, 3), (5, 4), (1, 1)\}$, $\dot{c}^{\mathfrak{A}} := 2$
- $B := \{k, l, m, n, o\}$, $\dot{Q}^{\mathfrak{B}} := \{(k, m, o), (n, n, l)\}$, $\dot{R}^{\mathfrak{B}} := \{(o, o), (m, m), (k, l)\}$, $\dot{c}^{\mathfrak{B}} := n$

und die Funktionen $\dot{f}^{\mathfrak{A}} \colon A \to A$ und $\dot{f}^{\mathfrak{B}} \colon B \to B$ definiert sind durch

x	1	2	3	4	5
$\dot{f}^{\mathfrak{A}}(x)$	2	1	2	5	4

x	k	l	m	n	o
$\dot{f}^{\mathfrak{B}}(x)$	l	k	n	o	n

Überprüfen Sie, ob $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$ gilt. Falls ja, geben Sie einen Isomorphismus von $\mathfrak{A}$ nach $\mathfrak{B}$ an und begründen Sie, warum es sich um einen Isomorphismus handelt. Falls nein, begründen Sie, warum es keinen Isomorphismus von $\mathfrak{A}$ nach $\mathfrak{B}$ gibt.

Aufgabe 3: **(20 Punkte)**

Sei $\sigma := \{\dot{E}, \dot{g}\}$ eine Signatur mit einem 2-stelligen Relationssymbol $\dot{E}$ und einem 1-stelligen Funktionssymbol $\dot{g}$. Geben Sie für jede der folgenden FO[σ]-Formeln je eine σ-Struktur an, die die Formel erfüllt, und eine, die die Formel nicht erfüllt.

(a) $\forall x \forall y \Big(\dot{E}(x, y) \rightarrow \dot{E}(y, x) \Big)$

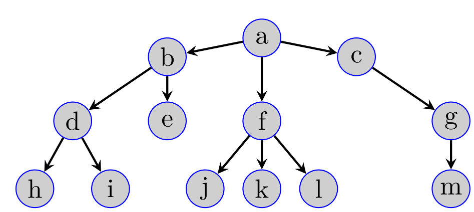
(b) $\forall x \forall y \Big(\dot{E}(x, y) \rightarrow \neg \dot{g}(x) \dot{=} \dot{g}(y) \Big)$

(c) $\Bigg(\forall x \forall y \forall z \Big(\big(\dot{E}(x, y) \wedge \dot{E}(y, z) \big) \rightarrow \dot{E}(x, z) \Big) \vee \forall x \forall y \Big(\dot{E}(x, y) \leftrightarrow \neg \dot{E}(y, x) \Big) \Bigg)$

Aufgabe 4: **(26 Punkte)**

In dieser Aufgabe sollen gerichtete Bäume durch Strukturen über einer Signatur mit einem 1-stelligen Funktionssymbol $\dot{Elternknoten}$ repräsentiert werden.

(a) Beschreiben Sie, wie ein gegebener gerichteter Baum $B = (V, E)$ durch eine Struktur über der Signatur $\sigma := \{\dot{Elternknoten}\}$ modelliert werden kann. Geben Sie die entsprechende Struktur für den nebenstehenden gerichteten Baum an.



(b) Geben Sie je eine Formel $\varphi(x)$ der Logik erster Stufe an, die aussagt, dass der Knoten x

(i) ein Blatt ist,

(ii) die Wurzel ist.

(c) Geben Sie je eine Formel $\psi(x, y)$ der Logik erster Stufe an, die ausdrückt, dass es vom Knoten x zum Knoten y

(i) einen Weg der Länge zwei gibt,

(ii) einen einfachen Weg der Länge zwei gibt.