Goethe-Universität Frankfurt am Main
Institut für Informatik
Theorie komplexer Systeme
Prof. Dr. Nicole Schweikardt

16. Dezember 2009

Diskrete Modellierung

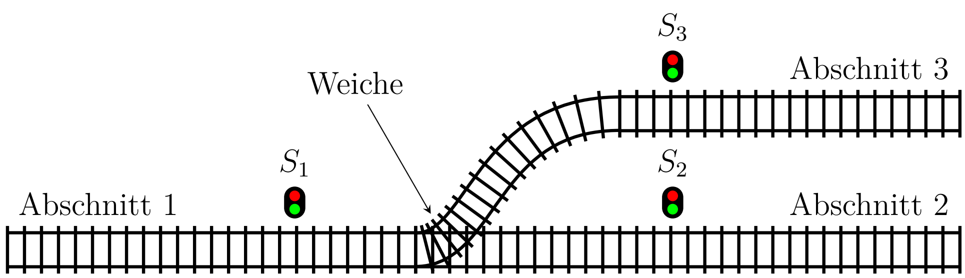
Wintersemester 2009/2010

Übungsblatt 9

Abgabe: *bis 13. Januar 2010, 8.15 Uhr vor der Vorlesung*
(oder bis 13. Januar 2010, 8.15 Uhr in Raum 113, Robert-Mayer-Str. 11–15)

Aufgabe 1: **($5 + 7 + 4 + 7 = 23$ Punkte)**

(a) Es sei die folgende Weiche einer Bahnanlage gegeben:



Die drei Signale S_1, S_2 und S_3 geben an, ob ein Zug vom entsprechenden Gleisabschnitt über die Weiche fahren darf: Leuchtet S_i grün, dann darf ein Zug vom Gleisabschnitt i aus über die Weiche fahren.

Die Weiche ist entweder auf „geradeaus fahren“ oder „abbiegen“ eingestellt. Wenn sie auf „geradeaus fahren“ eingestellt ist, dann fahren Züge, die vom Gleisabschnitt 1 aus über die Weiche fahren, auf den Gleisabschnitt 2 und umgekehrt. Ansonsten fahren Züge, die vom Gleisabschnitt 1 aus über die Weiche fahren, auf den Gleisabschnitt 3 und umgekehrt.

Mit Hilfe der folgenden atomaren Aussagen lassen sich nun einfache Anforderungen an die Weichenanlage formulieren:

- X_1: S_1 leuchtet grün.
- X_2: S_2 leuchtet grün.
- X_3: S_3 leuchtet grün.
- X_{W}: Die Weiche ist auf „geradeaus fahren“ eingestellt.

Beispielsweise besagt die aussagenlogische Formel $\big(\neg X_{\mathrm{W}} \wedge (X_1 \wedge \neg X_3)\big)$, dass die Weiche auf „abbiegen“ eingestellt ist, S_1 grün leuchtet und S_3 rot leuchtet.

Geben Sie aussagenlogische Formeln an, die nur die Variablen X_1, X_2, X_3 und X_{W} benutzen und Folgendes aussagen:

(i) Wenn S_2 grün leuchtet, dann ist die Weiche auf „geradeaus fahren“ eingestellt, und wenn S_3 grün leuchtet, dann ist die Weiche auf „abbiegen“ eingestellt.

(ii) Höchstens eines der drei Signale S_1, S_2, S_3 leuchtet grün. D.h. wenn S_1 grün leuchtet, dann leuchten S_2 und S_3 nicht grün und analog für die anderen Signale. Beachten Sie, dass auch der Fall eintreten kann, bei dem keines der drei Signale grün leuchtet.

(b) Geben Sie für jede der folgenden aussagenlogischen Formeln an, ob sie erfüllbar und/oder allgemeingültig ist. Geben Sie außerdem folgendes für jede Formel an: Falls die Formel erfüllbar ist, geben Sie eine zur Formel passende Belegung an, die die Formel erfüllt. Falls die Formel nicht allgemeingültig ist, geben Sie eine zur Formel passende Belegung an, die die Formel *nicht* erfüllt.

(i) $\varphi \;:=\; \Big(\big((X_1 \vee X_2) \leftrightarrow X_3\big) \;\wedge\; (X_1 \wedge \neg X_3) \Big)$

(ii) $\psi \;:=\; \Bigg(\Big(X_1 \;\wedge\; \big(X_1 \to (X_2 \vee X_3)\big)\Big) \;\to\; X_3 \Bigg)$

(c) Welche der folgenden Formeln sind in Negationsnormalform (NNF), disjunktiver Normalform (DNF) und/oder konjunktiver Normalform (KNF)?

(i) $\varphi \;:=\; \Big(\big(\neg X_1 \wedge (X_2 \vee \neg X_3)\big) \vee \neg X_2\Big)$

(ii) $\psi \;:=\; \Big((X_1 \vee \neg X_2) \wedge \big((\neg X_1 \vee X_3) \vee X_4\big)\Big)$

(d) Geben Sie eine zur Formel $\varphi \;:=\; \big((X_2 \to X_1) \vee (X_2 \wedge \neg X_3)\big)$ äquivalente aussagenlogische Formel in konjunktiver Normalform an. Geben Sie auch Ihren Lösungsweg an.

Aufgabe 2: **(3 + 13 = 16 Punkte)**

Die Menge PBA der *positiven Booleschen Ausdrücke* ist die Menge der Wörter über dem Alphabet $A = \{\mathbf{0}, \mathbf{1}, \wedge, \vee, (,)\}$, die rekursiv wie folgt definiert ist:

Basisregel: (B) Die Symbole **0** und **1** sind in PBA.

Rekursive Regeln: (R1) Sind w_1 und w_2 in PBA, so ist auch $(w_1 \wedge w_2)$ in PBA.
(R2) Sind w_1 und w_2 in PBA, so ist auch $(w_1 \vee w_2)$ in PBA.

(a) Welche der folgenden Wörter gehören zur Sprache PBA, welche nicht? Sie brauchen Ihre Antworten nicht zu begründen.

Für jede richtige Antwort bekommen Sie einen Punkt, für jede **falsche** Antwort wird ein Punkt **abgezogen**. Die Gesamtpunktzahl bei dieser Teilaufgabe ist aber mindestens Null.

(i) $(\mathbf{1} \wedge \mathbf{0})$ **(ii)** $((\mathbf{1} \wedge V_{\mathbf{0}}) \vee \mathbf{0})$ **(iii)** $\mathbf{0} \vee ((\mathbf{1} \wedge \mathbf{0}) \wedge \mathbf{0})$

(b) Offensichtlich ist jedes Wort der Sprache PBA eine aussagenlogische Formel, es gilt also PBA $\subseteq$ AL. Sei $f : \mathsf{PBA} \to \{0, 1\}$ eine Funktion, die jedem Wort aus PBA einen Wahrheitswert zuweist. Für jedes $\varphi \in \mathsf{PBA}$ sei $f(\varphi) := [\![\varphi]\!]^{\mathcal{B}}$, wobei $\mathcal{B}(V_i) = 0$ für alle $i \in \mathbb{N}$.

(i) Berechnen Sie den jeweiligen Wert der folgenden Ausdrücke. Sie brauchen Ihre Antworten nicht zu begründen.
Für jede richtige Antwort bekommen Sie einen Punkt, für jede **falsche** Antwort wird ein Punkt **abgezogen**. Die Gesamtpunktzahl bei dieser Teilaufgabe ist aber mindestens Null.

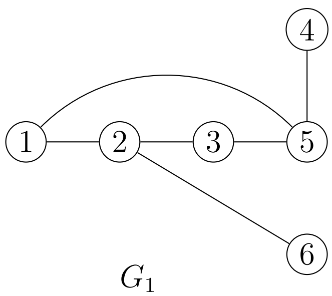
(I) $f(\,(\mathbf{1} \wedge \mathbf{0})\,)$ **(II)** $f(\,((\mathbf{1} \wedge \mathbf{1}) \vee \mathbf{1})\,)$ **(III)** $f(\,(((\mathbf{0} \vee \mathbf{0}) \vee (\mathbf{1} \vee \mathbf{0})) \wedge (\mathbf{0} \vee \mathbf{1}))\,)$

(ii) Für jedes $\varphi \in \mathsf{PBA}$ bezeichne $|\varphi|_{\mathbf{0}}$ die Anzahl der Vorkommen des Symbols **0** in φ.
Zeigen Sie durch Induktion über den Aufbau von PBA, dass für alle Wörter $\varphi \in \mathsf{PBA}$ gilt:

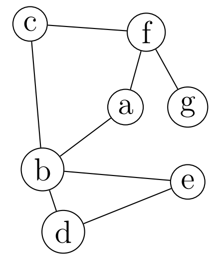
$$|\varphi|_{\mathbf{0}} = 0 \quad \Longrightarrow \quad f(\varphi) = 1$$

Aufgabe 3: **(13 + 18 = 31 Punkte)**

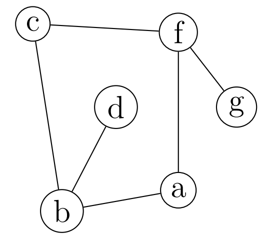
(a) Es seien die folgenden drei ungerichteten Graphen G_1, G_2 und G_3 gegeben.



G_1



G_2



G_3

(i) Geben Sie die Knotenmenge V und die Kantenmenge E des Graphen G_1 an. Repräsentieren Sie G_1 außerdem durch eine Adjazenzliste.

(ii) Wie groß ist Grad(G_1)?

(iii) Geben Sie einen einfachen Weg der Länge 4 vom Knoten 3 zum Knoten 4 in G_1 an.

(iv) Welche der folgenden Aussagen ist wahr, welche falsch? Sie brauchen Ihre Antworten nicht zu begründen.
Für jede richtige Antwort bekommen Sie einen Punkt, für jede **falsche** Antwort wird ein Punkt **abgezogen**. Die Gesamtpunktzahl bei dieser Teilaufgabe ist aber mindestens Null.

(I) G_3 ist ein induzierter Teilgraph von G_2

(II) G_1 ist isomorph zu G_2

(III) G_3 ist ein Teilgraph von G_1

(v) Geben Sie einen Isomorphismus von G_1 nach G_3 an. (Sie müssen den Isomorphismus nur angeben. Sie brauchen nicht zu begründen, warum er ein Isomorphismus ist.)

(b) Auf dem Weihnachtsmarkt von Großdorf sollen insgesamt 8 Stände rund um den Marktplatz arrangiert werden. Die 8 Stände setzen sich folgendermaßen zusammen:

- Ein Stand, in dem die traditionelle Weihnachtskrippe aufgebaut ist.
- Zwei Stände, an denen Kunsthandwerk verkauft wird: einer der beiden Stände ist die Töpferei, der andere bietet Holzschmuck aus dem Erzgebirge an.
- Zwei Glühweinstände; einer davon wird von Herrn Max, der andere von Frau Peters betrieben.
- Drei Essensstände; einer davon verkauft Crêpes, der andere Waffeln und der dritte Steaks vom Holzkohlegrill.

Bei der Platzierung der 8 Stände um den Marktplatz ist folgendes zu beachten: Neben der Weihnachtskrippe darf keiner der Glühweinstände platziert werden. Essensstände dürfen nicht nebeneinander stehen, die beiden Glühweinstände dürfen nicht nebeneinander stehen, und die beiden Kunsthandwerkstände dürfen nicht nebeneinander stehen. Aus Sicherheitsgründen darf der Holzkohlegrill weder neben der Weihnachtskrippe noch neben dem Stand mit dem Holzschmuck aus dem Erzgebirge stehen. Herr Max ist mit den Besitzern des Holzkohlegrills und der Töpferei befreundet und möchte daher unbedingt die beiden als Nachbarn haben. Außerdem ist zu beachten, dass sich der Betreiber des Waffelstands weder mit Frau Peters noch mit dem Besitzer der Töpferei verträgt und daher auf keinen Fall neben einem der beiden platziert werden will.

(i) Stellen Sie den Konfliktgraph auf, in dem die Stände durch Knoten repräsentiert werden und eine Kante zwischen zwei Knoten anzeigt, dass die entsprechenden Stände nicht nebeneinander platziert werden können.

(ii) Geben Sie das Komplement des Konfliktgraphen an.

(iii) Geben Sie einen Hamiltonkreis im Komplement des Konfliktgraphen an.

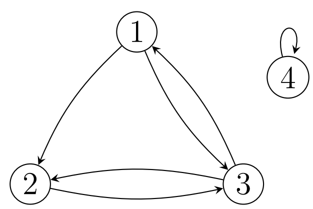
(iv) Geben Sie eine Platzierung der 8 Stände rund um den Marktplatz an, mit der alle zufrieden sind.

Aufgabe 4: **($19 + 11 = 30$ Punkte)**

Für einen gerichteten Graphen $G = (V, E)$ mit $V = \{1, \ldots, n\}$ sei $A := (a_{i,j})_{i,j=1\ldots,n}$ die Adjazenzmatrix des Graphen G. Diese $n \times n$-Matrix enthält in Zeile i und Spalte j den Eintrag $a_{i,j}$ wobei

$$a_{i,j} \ := \begin{cases} 1, & \text{falls } (i,j) \in E \\ 0, & \text{falls } (i,j) \notin E. \end{cases}$$

Betrachten Sie den gerichteten Graphen G_1 in der folgenden Abbildung.



G_1

(a) **(i)** Geben Sie die Adjazenzmatrix von G_1 an.

(ii) Sei A die Adjazenzmatrix von G_1 aus Teilaufgabe (i). Berechnen Sie die Matrix A^3.

(iii) Wieviele verschiedene Wege der Länge 3 führen in G_1 vom Knoten 1 zum Knoten 2?

(iv) Sei $G = (V, E)$ ein gerichteter Graph mit $V = \{1, \ldots, n\}$ und sei A die Adjazenzmatrix von G. Für alle $k \in \mathbb{N}_{>0}$ und $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ bezeichnen wir mit $(A^k)_{i,j}$ den Eintrag der Matrix A^k in Zeile i und Spalte j.
Beweisen Sie, dass für alle $k \in \mathbb{N}_{>0}$ der Wert $(A^k)_{i,j}$ genau die Anzahl der verschiedenen Wege der Länge k vom Knoten i zum Knoten j in G angibt.

(b) Fassen Sie den abgebildeten Graphen G_1 als Web-Graph mit den vier Webseiten 1, 2, 3 und 4 auf, die wie in der Abbildung miteinander verlinkt sind.

(i) Berechnen Sie die Page-Ranks PR_1, PR_2, PR_3 und PR_4 der vier Webseiten von G_1 bezüglich des Dämpfungsfaktors $d = \frac{1}{2}$.

(ii) Stellen Sie für den angegebenen Web-Graph G_1 und den Dämpfungsfaktor $d = \frac{1}{2}$ die Page-Rank-Matrix $P(G_1, \frac{1}{2})$ auf.

Frohe Weihnachten und einen Guten Rutsch ins neue Jahr!