Goethe-Universität Frankfurt am Main
Institut für Informatik
Theorie komplexer Systeme
Prof. Dr. Nicole Schweikardt

9. Dezember 2009

Diskrete Modellierung

Wintersemester 2009/2010

Übungsblatt 8

Abgabe: *bis 16. Dezember 2009, 8.15 Uhr (vor der Vorlesung oder in Raum RM 11-15/113)*

Aufgabe 1: **(25 Punkte)**

(a) Betrachten Sie die Relation $R := \{(a,a),(a,b),(a,c),(b,b),(b,c)\}$ über der Menge $A := \{a,b,c,d\}$. Welche Paare $(x,y) \in A \times A$ müssen zu R mindestens hinzugefügt werden, um aus R eine Relation zu erhalten, die jeweils

(i) reflexiv ist?
(ii) symmetrisch ist?
(iii) antisymmetrisch ist?
(iv) konnex ist?
(v) transitiv ist?
(vi) eine Präordnung ist?

(b) Betrachten Sie die folgenden Relationen R_i über der jeweiligen Menge M_i.

(i) $M_1 := \{1,2,3,4,5\}$, $R_1 := \{(1,1),(1,2),(2,2),(2,3),(3,3),(4,4),(4,5),(5,4),(5,5)\}$

(ii) $M_2 := \{-4,-3,-2,-1,0,1,2\}$, $R_2 := \{(x,y) \in M_2 \times M_2 \,:\, x \cdot y \leq 3\}$

(iii) $M_3 := \mathbb{N}_{>0}$, $R_3 := \{(a,b) \in M_3 \times M_3 \,:\, ggT(a,b) > 1\}$,
wobei $ggT(a,b)$ der größte gemeinsame Teiler der Zahlen a und b ist.

Stellen Sie R_1 durch einen gerichteten Graphen in graphischer Darstellung dar.
Geben Sie für jedes $i \in \{1,2,3\}$ an, welche Eigenschaften (reflexiv, symmetrisch, antisymmetrisch, konnex, transitiv) die Relation R_i jeweils besitzt.

(c) Für einen gerichteten Baum $B = (V,E)$ definieren wir die Relation

$$R_B := \{(x,y) \in V \times V \,:\, \text{es gibt einen Weg von } x \text{ nach } y \text{ in } B\}$$

(i) Zeigen Sie, dass R_B für jeden gerichteten Baum B eine partielle Ordnung ist.

(ii) Geben Sie gerichtete Bäume B_1 und B_2 mit jeweils mindestens 3 Knoten an, so dass

(I.) R_{B_1} eine lineare Ordnung ist. (II.) R_{B_2} keine lineare Ordnung ist.

Aufgabe 2: **(25 Punkte)**

Zeigen Sie, dass die im Folgenden angegebenen Relationen R_1 und R_2 jeweils Äquivalenzrelationen sind. Geben Sie jeweils jede Äquivalenzklasse von R_1 und R_2 sowie jeweils den Index von R_1 und R_2 an. Geben Sie für jede Äquivalenzklasse von R_1 bzw. R_2 jeweils einen Vertreter an.

(a) Zwei Zahlen $a,b \in \mathbb{N}$ heißen *kongruent modulo* 7 (geschrieben als $a \equiv b \mod 7$), wenn die Zahl $a-b$ durch 7 teilbar ist, d.h. es gibt ein $z \in \mathbb{Z}$, so dass $a - b = 7 \cdot z$. Betrachten Sie

$$R_1 := \{(a,b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \,:\, a \equiv b \mod 7\}$$

(b) Sei $A := \{a, b\}$ ein Alphabet und sei A^5 die Menge aller Wörter der Länge 5, die sich mit Buchstaben aus A bilden lassen. Betrachten Sie

$$R_2 := \{(w_1, w_2) \in A^5 \times A^5 \,:\, w_2 \text{ entsteht aus } w_1 \text{ durch Umsortierung der Buchstaben}\}$$

Aufgabe 3: **(25 Punkte)**

Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Jede transitive und symmetrische Relation ist auch reflexiv.

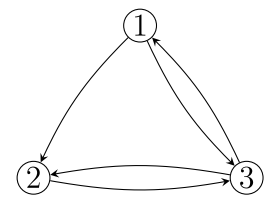
(b) Eine Relation ist genau dann antisymmetrisch, wenn sie nicht symmetrisch ist.

(c) Es gibt keine Relation, die gleichzeitig antisymmetrisch, symmetrisch, konnex, transitiv und reflexiv ist.

(d) Der Index jeder konnexen Äquivalenzrelation ist 1.

Aufgabe 4: **(25 Punkte)**

Betrachten Sie den Web-Graph $G = (V, E)$, der aus den drei Webseiten 1, 2 und 3 besteht, die wie in der nebenstehenden Abbildung miteinander verlinkt sind. Die Entwickler des Page-Rank-Algorithmus und Gründer von Google, Larry Page und Sergey Brin, empfehlen einen Dämpfungsfaktor von $d := 0.85 = \frac{17}{20}$. Benutzen Sie für die folgenden Aufgaben ebenfalls diesen Dämpfungsfaktor.



(a) Berechnen Sie ähnlich wie in Beispiel 5.2 aus dem Skript die Page-Ranks PR_1, PR_2 und PR_3 der drei Webseiten von G mit dem Dämpfungsfaktor d.

(b) Stellen Sie für den angegebenen Web-Graph G und den Dämpfungsfaktor d die Page-Rank-Matrix $P(G, d)$ auf.

(c) Sei P die Page-Rank-Matrix $P(G, d)$ aus Teilaufgabe (b). Angenommen der Zufalls-Surfer startet auf einer der drei Webseiten von G, wobei er jede Webseite gleichwahrscheinlich als Startpunkt wählen kann. Das bedeutet, dass die Anfangsverteilung für den Zufalls-Surfer durch $X^{(0)} := (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ beschrieben wird. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung des Zufalls-Surfers auf den Knoten von G nach einem Schritt (d.h. $X^{(1)}$), nach zwei Schritten (d.h. $X^{(2)}$) und nach drei Schritten (d.h. $X^{(3)}$). Dabei ist $X^{(1)} := X^{(0)} \cdot P$, $X^{(2)} := X^{(1)} \cdot P$ und $X^{(3)} := X^{(2)} \cdot P$.

(d) Gesucht ist ein Web-Graph $G' = (V', E')$ mit drei Webseiten, in dem jede Webseite auf mindestens eine Webseite verlinkt, die nicht sie selber ist. Zusätzlich soll der Zufalls-Surfer mit der Anfagsverteilung $X^{(0)} := (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ nach einem Schritt in G' genau die selbe Wahrscheinlichkeitsverteilung erreichen, es soll also $X^{(0)} \cdot P(G', d) = X^{(0)}$ gelten. Geben Sie einen solchen Graphen G' an und weisen Sie nach, dass $X^{(0)} \cdot P(G', d) = X^{(0)}$ gilt.