Goethe-Universität Frankfurt am Main
Institut für Informatik
Theorie komplexer Systeme
Prof. Dr. Nicole Schweikardt

2. Dezember 2009

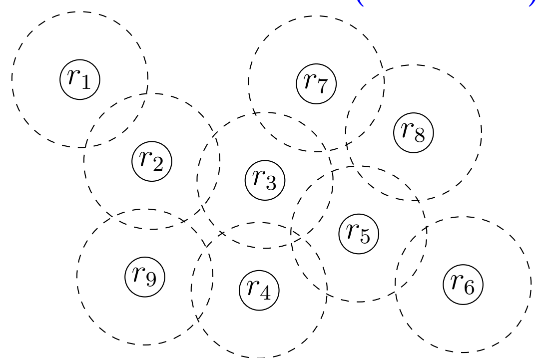
Diskrete Modellierung

Wintersemester 2009/2010

Übungsblatt 7

Abgabe: *bis 9. Dezember 2009, 8.15 Uhr (vor der Vorlesung oder in Raum RM 11-15/113)*

Aufgabe 1: **(25 Punkte)**



Es seien die Radiostationen $r_1, \ldots, r_9$ gegeben, denen jeweils eine Sendefrequenz zugeordnet werden soll. Radiostationen, die zu dicht beieinander liegen, dürfen allerdings nicht die gleiche Frequenz erhalten. Das nebenstehende Diagramm stellt die Lage der einzelnen Radiostationen dar. Um jede Station ist ein gestrichelter Kreis eingezeichnet, der die Reichweite einer Radiostation repräsentiert. Schneiden sich die Kreise von zwei Radiostationen r_i und r_j, so liegen r_i und r_j zu dicht beieinander und dürfen nicht die gleiche Frequenz zugeordnet bekommen.

- **(a)** Geben Sie den Konfliktgraphen an, der als Knotenmenge die Radiostationen besitzt und bei dem eine Kante zwischen zwei Radiostationen r_i und r_j anzeigt, dass r_i und r_j nicht die gleiche Frequenz benutzen dürfen.
- **(b)** Sei $G = (V, E)$ der Konfliktgraph aus Aufgabenteil (a). Geben Sie eine konfliktfreie Knotenmarkierung $m : V \to \mathbb{N}$ für G an, die möglichst wenige verschiedene Markierungen benutzt, d.h., $|\text{Bild}(m)|$ soll minimal sein.
- **(c)** Weisen Sie jeder der Radiostationen $r_1, \ldots, r_9$ genau eine Frequenz zu, so dass Radiostationen, die zueinander in Konflikt stehen, nicht die gleiche Frequenz erhalten und möglichst wenige verschiedene Frequenzen benötigt werden.
- **(d)** Wie viele verschiedene Frequenzen werden für die Radiostationen $r_1, \ldots, r_9$ mindestens benötigt, d.h. wie groß ist die chromatische Zahl des Konfliktgraphen?

Aufgabe 2: **(25 Punkte)**

Clara und Diana spielen das folgende Spiel. Das Spiel ist in Runden aufgeteilt, wobei Clara in den ungeraden Runden und Diana in den geraden Runden spielt. In der ersten Runde wählt Clara eine Zahl aus $\{2, 3\}$. In jeder der nachfolgenden Runden wählt die jeweilige Spielerin eine Zahl aus $\{1, 2, 3\}$ mit der Einschränkung, dass die Zahl aus der vorhergehenden Runde nicht gewählt werden darf. Am Ende jeder Runde wird die Summe aller bereits gewählten Zahlen berechnet. Das Spiel ist beendet, wenn diese Summe mindestens den Wert 6 erreicht. Die Spielerin, die in der letzten Runde am Zug war gewinnt, wenn der Wert der Summe genau 6 beträgt und verliert, falls die Summe den Wert 6 übersteigt.

- **(a)** Beschreiben Sie das Spiel durch einen Entscheidungsbaum.
- **(b)** Ist der von Ihnen bei Teilaufgabe (a) aufgestellte Entscheidungsbaum ein Binärbaum? Ist er ein vollständiger Binärbaum?

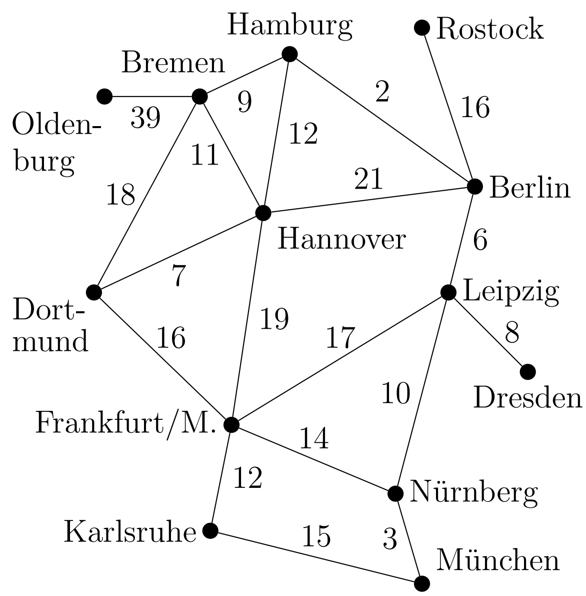
(c) Was haben alle Spielsituationen gemeinsam, die den Blättern des Entscheidungsbaumes entsprechen? Was haben alle Situationen des Spiels gemeinsam, die durch innere Knoten repräsentiert werden? Welcher Spielsituation entspricht die Wurzel?

(d) Wie viele Runden dauert das Spiel höchstens, d.h. wie groß ist die Höhe des Entscheidungsbaumes? Wie viele Runden dauert das Spiel mindestens, d.h. was ist die kürzeste Länge eines Weges von der Wurzel zu einem Blatt?

(e) Wer gewinnt, wenn beide Spielerinnen optimal spielen, d.h. wenn jede Spielerin immer nur diejenigen Zahlen wählt, mit denen sie – falls dies noch möglich ist – gewinnen kann?

Aufgabe 3: **(25 Punkte)**

Wir nehmen an, die Deutsche Bahn hat eine Studie für ausgewählte ICE-Strecken in Deutschland durchgeführt. Ziel der Studie war es, für einige Strecken jeweils zu bestimmen, welche Kosten pro unbesetztem Sitzplatz im ICE entstehen. Das Ergebnis der Studie sehen Sie im nebenstehenden Graphen. Der Zahlenwert an einer Kante zwischen zwei Städten gibt an, welche Kosten durch einen unbesetzten Sitzplatz im ICE zwischen diesen beiden Städten entstehen.



Wir nehmen weiterhin an, dass Manager der Deutschen Bahn Kosten sparen und daher so viele ICE-Strecken wie möglich abbauen möchten. Es soll ein Netz der ICE-Strecken übrig bleiben, die möglichst wenige Gesamtkosten für unbesetzte Plätze verursachen. Gleichzeitig soll aber jede der abgebildeten Städte an das ICE-Netz angeschlossen bleiben. Ähnlich wie im Beispiel 4.48 aus dem Skript ist also ein minimaler Spannbaum gesucht.

Wenden Sie folgendes Verfahren an, um einen minimalen Spannbaum B im abgebildeten Graphen zu finden: Wählen Sie einen beliebigen einfachen Kreis im Graphen. Entfernen Sie aus diesem Kreis die Kante mit den höchsten Kosten. Führen Sie dies solange fort, bis der jeweils entstehende Graph keine einfachen Kreise mehr enthält.

(a) Geben Sie den von Ihnen bestimmten minimalen Spannbaum B an.

(b) Welche Städte werden in B durch Blätter repräsentiert, d.h., welche Städte sind in B nur über genau eine Verbindung an das ICE-Netz angeschlossen?

(c) Geben Sie den kürzesten Weg in B von Frankfurt/M. nach Dortmund an.

(d) Geben Sie einen einfachen Weg maximaler Länge in B an, d.h. welches Städte-Paar ist in B so verbunden, dass ICE-Reisende dazwischen die maximale Anzahl anderer Städte besuchen müssen? Wie groß ist die Länge dieses Weges?

Aufgabe 4: **(25 Punkte)**

Ein ungerichteter Graph $G = (V, E)$ heißt *selbstkomplementär*, wenn er isomorph zu seinem Komplement $\tilde{G} = (\tilde{V}, \tilde{E})$ ist. Dabei ist $\tilde{V} := V$ und $\tilde{E} := \{\{x, y\} : x, y \in V,\ x \neq y,\ \{x, y\} \notin E\}$.

(a) Geben Sie für jedes $n \in \mathbb{N}_{>0}$ mit $n \leq 7$ einen selbstkomplementären Graphen an, der n Knoten hat, falls ein solcher Graph existiert.

(b) Beweisen Sie, dass für die Knotenanzahl $|V|$ jedes selbstkomplementären Graphen $G = (V, E)$ gilt: Es gibt ein $k \in \mathbb{N}$ so dass $|V| = 4k$ oder $|V| = 4k + 1$.