

Diskrete Modellierung

Wintersemester 2009/2010

Übungsblatt 6

Abgabe: bis 2. Dezember 2009, 8.15 Uhr (vor der Vorlesung oder in Raum RM 11-15/113)

Aufgabe 1:

(25 Punkte)

(a) Geben Sie die folgenden Graphen G_1 und G_2 in graphischer Darstellung an.

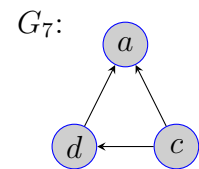
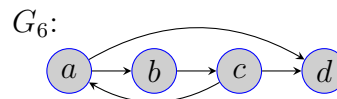
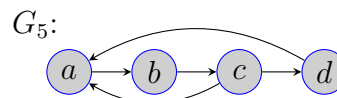
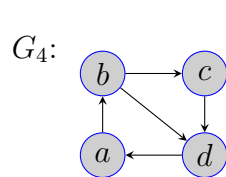
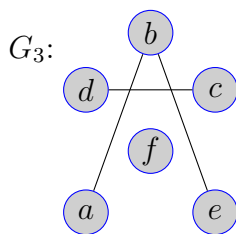
Hinweis: Beachten Sie dabei, ob es sich jeweils um einen gerichteten oder einen ungerichteten Graphen handelt.

(i) $G_1 = (\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, \{\{x, y\} : x = 2 \cdot y\})$

(ii) $G_2 = (\{x \in \mathbb{N}_{>0} : 1 \leq x \leq 6\}, \{(x, y) : x = y + 1\} \cup \{(x, y) : y = 3 \cdot x\})$

Sind die Graphen G_1 und G_2 zusammenhängend bzw. stark zusammenhängend? Sind sie azyklisch?

(b) Seien G_3, G_4, G_5, G_6 und G_7 die folgenden Graphen:



(i) Geben Sie jeweils die Knoten- und Kantenmenge von G_3 und G_4 an.

(ii) Repräsentieren Sie die Graphen G_3 und G_4 jeweils durch eine Adjazenzliste und durch eine Adjazenzmatrix.

(iii) Gelten die folgenden Aussagen ?

(I.) $G_3 \cong G_1$ (II.) $G_4 \cong G_5$ (III.) $G_5 \cong G_6$ (IV.) $G_6 \cong G_7$

(V.) G_7 ist ein induzierter Teilgraph von G_5 .

(VI.) G_7 ist ein induzierter Teilgraph von G_6

Geben Sie für (I.) bis (IV.) jeweils einen Isomorphismus an, falls ein solcher existiert.

(iv) Geben Sie in G_3 und G_5 jeweils einen nicht einfachen Weg an, der kein Kreis ist.

(v) Geben Sie in G_3 und G_5 jeweils einen nicht einfachen Kreis und einen einfachen Kreis an, falls ein solcher existiert.

Aufgabe 2:

(25 Punkte)

Die "Hyper Real Finance" Bank hat die Finanzkrise überstanden. Sie schreibt Stellenangebote aus: In den Abteilungen *Sparbücher*, *Immobilien*, *Kredite* und *Aktien* ist jeweils eine Position zu besetzen. Außerdem ist ein Job im *Vorstand* frei. Es treffen fünf Bewerbungen ein. Allerdings hat jeder der Bewerber starke Abneigungen gegen bestimmte Abteilungen, in denen er auf keinen Fall arbeiten will. Im Einzelnen ergeben sich folgende Zu- und Abneigungen:

- Alle Bewerber können sich vorstellen, in den Vorstand zu gehen.
- Andererseits will keiner außer Klaus mit den Sparbüchern zu tun haben.
- Klaus wiederum möchte weder in der Kredit- noch in der Aktienabteilung arbeiten.
- Gerhard möchte sich nicht mit den Immobilien beschäftigen.
- Auch Johann mag keine Immobilien und möchte nicht in die Aktienabteilung gehen.
- Frank will weder in die Aktien-, noch die Kredit- oder die Immobilienabteilung.
- Für Thomas gibt es bis auf die Sparbücher und die Immobilien keine Einschränkungen.

Es ist klar, dass jede Stelle nur von höchstens einem Bewerber besetzt werden kann und jeder Bewerber nur höchstens eine Stelle erhalten kann.

- Geben Sie den Konfliktgraphen an, dessen Knotenmenge die Bewerber und die offenen Stellen repräsentiert. Eine Kante in diesem Graphen zwischen Stelle A und Bewerber B steht dafür, dass B nicht auf der Stelle A arbeiten will.
- Geben Sie auf der Grundlage Ihres Konfliktgraphen einen “Zufriedenheitsgraphen” mit der gleichen Knotenmenge an. Eine Kante in diesem “Zufriedenheitsgraphen” zwischen Stelle A und Bewerber B soll bedeuten, dass B mit der Stelle A zufrieden wäre.
- Geben sie ein Matching maximaler Größe in Ihrem “Zufriedenheitsgraphen” an.
- Geben Sie eine Möglichkeit an, wie die Bank die Bewerber auf die Stellen verteilen kann, so dass möglichst viele Stellen besetzt werden und kein Bewerber eine Stelle erhält, auf der er nicht arbeiten will.
- Begründen Sie, warum die von Ihnen gefundene Zuordnung bestmöglich ist, das heißt, warum es keine Zuordnung der Bewerber auf die Stellen gibt, die mehr Stellen besetzt.

Aufgabe 3:

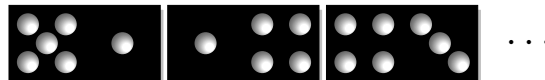
(25 Punkte)

Sei $G = (V, E)$ ein gerichteter Graph mit mindestens zwei Knoten, so dass für alle $v, v' \in V$ mit $v \neq v'$ entweder $(v, v') \in E$ oder $(v', v) \in E$. Beweisen Sie durch vollständige Induktion über die Anzahl der Knoten von G , dass G einen Hamilton-Weg besitzt.

Aufgabe 4:

(25 Punkte)

Die Menge $Dom_n := \{\{x, y\} : x, y \in \mathbb{N}, x \neq y, 0 \leq x \leq n, 0 \leq y \leq n\}$ repräsentiert eine Teilmenge aller möglichen Dominosteine. Das Element $\{x, y\} = \{y, x\}$ steht für den Stein, der x Augen auf der einen und y Augen auf der anderen Hälfte zeigt, wobei $x \neq y$ für jeden Stein in Dom_n gilt. Die maximal vorkommende Augenzahl auf einer Steinhälfte wird mit $n \in \mathbb{N}$ bezeichnet. Zwei Steine können aneinander gelegt werden, wenn ihre benachbarten Augenzahlen gleich sind. Mehrere aneinander gelegte Steine ergeben eine Kette, die beispielsweise wie folgt beginnt:



Ist es möglich, eine einzelne Kette ohne Verzweigungen so zu legen, dass jeder Stein aus Dom_n genau einmal vorkommt?

- Modellieren Sie diese Frage als ein Problem für einen geeigneten Graphen.
- Gibt es eine Kette für $n = 18$? Beweisen Sie, dass Ihre Antwort korrekt ist.
- Für welche $n \in \mathbb{N}$ gibt es eine Kette, für welche nicht?
- Zu Dom_n werden alle Steine hinzu getan, deren Augenzahl pro Hälfte höchstens n beträgt und die auf beiden Hälften die gleiche Augenzahl zeigen. Es entsteht $Dom'_n = Dom_n \cup \{\{x, x\} : x \in \mathbb{N}, 0 \leq x \leq n\}$. Für welche $n \in \mathbb{N}$ gibt es eine verzweigungsfreie Kette, die alle Steine aus Dom'_n genau einmal benutzt?