Goethe-Universität Frankfurt am Main
Institut für Informatik
Theorie komplexer Systeme
Prof. Dr. Nicole Schweikardt

18. November 2009

Diskrete Modellierung

Wintersemester 2009/2010

Übungsblatt 5

Abgabe: *bis 25. November 2009, 8.15 Uhr (vor der Vorlesung oder in Raum RM 11-15/113)*

Aufgabe 1: (25 Punkte)

(a) Entscheiden Sie für jede der folgenden aussagenlogischen Formeln, ob sie erfüllbar, unerfüllbar und/oder allgemeingültig ist. Geben Sie für jede erfüllbare Formel eine erfüllende Belegung und für jede nicht allgemeingültige Formel eine nicht erfüllende Belegung an.

(i) $(V_2 \vee \mathbf{0})$

(ii) $\big((V_0 \wedge V_1) \rightarrow (V_0 \vee V_1)\big)$

(iii) $\big(V_0 \rightarrow (V_0 \rightarrow V_1)\big)$

(iv) $\neg\big((V_0 \wedge V_1) \rightarrow (V_0 \vee V_1)\big)$

(v) $\psi_n := \bigwedge_{i=1}^{n} (V_i \leftrightarrow V_{2i})$ für $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$

(b) Eine natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}_{>0}$ heißt *Quadratzahl*, falls es eine Zahl $m \in \mathbb{N}$ gibt mit $n = m^2$. Für jedes $n \in \mathbb{N}_{>0}$ sei die aussagenlogische Formel φ_n definiert durch

$$\varphi_n \ := \begin{cases} (V_n \leftrightarrow V_{n^2}), & \text{falls } n \text{ eine Quadratzahl ist} \\ (V_n \leftrightarrow \neg V_{n^2}), & \text{falls } n \text{ keine Quadratzahl ist.} \end{cases}$$

Es ist also beispielsweise $\varphi_1 = (V_1 \leftrightarrow V_1)$, $\varphi_2 = (V_2 \leftrightarrow \neg V_4)$, $\varphi_3 = (V_3 \leftrightarrow \neg V_9)$, $\varphi_4 = (V_4 \leftrightarrow V_{16})$ und $\varphi_5 = (V_5 \leftrightarrow \neg V_{25})$.
Geben Sie eine Belegung $\mathcal{B}\colon \textsc{Avar} \rightarrow \{0,1\}$ an, so dass für alle $n \in \mathbb{N}_{>0}$ gilt: $\mathcal{B}$ erfüllt φ_n.

(c) Zeigen Sie, dass jede aussagenlogische Formel φ semantisch äquivalent zu unendlich vielen verschiedenen aussagenlogischen Formeln ist.

Aufgabe 2: (25 Punkte)

Weihnachten ist nicht mehr weit und Sie haben noch kein Geschenk für Ihre Eltern. Sie wollen nicht direkt nach den Wünschen Ihrer Eltern fragen und müssen daher auf deren Andeutungen achten. Diese Andeutungen ergeben folgende Aussagen:

- Wenn das Geschenk Konzertkarten sind, dann sollen diese nicht eingepackt sein.
- Wenn das Geschenk teuer ist und es Konzertkarten sind, dann soll das Geschenk keine Überraschung sein.
- Das Geschenk soll genau dann eingepackt sein, wenn es eine Überraschung ist.
- Wenn das Geschenk nicht eingepackt ist, dann soll es teuer sein oder aus Konzertkarten bestehen.

(a) Zerlegen Sie den obigen Text in atomare Aussagen und geben Sie eine aussagenlogische Formel φ an, die alle Andeutungen Ihrer Eltern repräsentiert.

Betrachten Sie nun die nachfolgenden Aussagen:

- Das Geschenk ist teuer.
- Wenn das Geschenk eingepackt ist, dann sind es keine Konzertkarten.
- Wenn das Geschenk eine teure Überraschung ist, dann besteht es nicht aus eingepackten Konzertkarten.

(b) Geben Sie für jede der drei Aussagen eine aussagenlogische Formel an, die die Aussage repräsentiert.

(c) Entscheiden Sie für jede der drei aussagenlogischen Formeln aus (b), ob sie aus der Formel φ in (a) folgt.

Aufgabe 3: **(25 Punkte)**

Betrachten Sie die aussagenlogische Formel

$$\varphi \ := \ \Big((V_0 \wedge V_1) \vee \neg(V_3 \to (V_1 \vee V_0))\Big).$$

(a) Wandeln Sie φ mittels Wahrheitstafel in eine äquivalente aussagenlogische Formel in DNF um.

(b) Wenden Sie Algorithmus 3.39 aus dem Skript an, um eine zu φ äquivalente Formel in KNF zu finden.

Aufgabe 4: **(25 Punkte)**

Sei $n \in \mathbb{N}$, seien $A_0, \dots, A_n, B_0, \dots, B_n$ genau $2 \cdot (n+1)$ verschiedene aussagenlogische Variablen, und sei

$$\varphi_n \ := \ \bigwedge_{i=0}^{n} (A_i \leftrightarrow B_i).$$

(a) Beschreiben Sie die erfüllenden Belegungen $\mathcal{B}\colon \mathrm{Var}(\varphi_n) \to \{0,1\}$ für φ_n. Wie viele solche Belegungen gibt es?

(b) Geben Sie eine zu φ_n äquivalente Formel in DNF an.

(c) Beweisen Sie Satz 3.44, d.h. beweisen Sie, dass jede zu φ_n äquivalente Formel in DNF mindestens 2^{n+1} konjunktive Klauseln hat.

Hinweis: Eine Möglichkeit, dies zu zeigen, ist einen Beweis durch Widerspruch zu führen. Nehmen Sie dazu an, dass ψ_n eine zu φ_n äquivalente Formel in DNF ist, die aus weniger als 2^{n+1} konjunktiven Klauseln besteht. D.h. es gibt eine natürliche Zahl $N < 2^{n+1}$ und N konjunktive Klauseln $\kappa_1, \dots, \kappa_N$, so dass $\psi_n = \kappa_1 \vee \dots \vee \kappa_N$. Folgern Sie aus Ihrer Antwort aus Teil (a), dass mindestens eine der Klauseln $\kappa_1, \dots, \kappa_N$ von mindestens zwei verschiedenen die Formel φ_n erfüllenden Belegungen wahr gemacht wird. Leiten Sie daraus einen Widerspruch her.