

Diskrete Modellierung

Wintersemester 2009/2010

Übungsblatt 4

Abgabe: bis 18. November 2009, 8.15 Uhr (vor der Vorlesung oder in Raum RM 11-15/113)

Aufgabe 1: (18 Punkte)

Welche der folgenden Wörter gehören gemäß der Definition 3.3 zur Sprache AL? Sie brauchen Ihre Antworten nicht zu begründen.

- | | | |
|-----------------------------|--|--|
| (a) (1) | (d) $(V_1 \leftarrow V_2)$ | (g) $((V_1 \wedge V_2) \wedge (V_3 \wedge V_4))$ |
| (b) $(1 \leftrightarrow 0)$ | (e) $(V_1 \rightarrow V_2 \rightarrow V_2)$ | (h) $\neg(V_1 \vee \neg V_2)$ |
| (c) $(x \vee y)$ | (f) $((V_1 \wedge V_2) \wedge V_3) \wedge V_4$ | (i) $\neg(\neg V_{34})$ |

Aufgabe 2: (29 Punkte)

Die Mensa der Universität versucht ständig, ihr Angebot an die Wünsche der Studierenden anzupassen. Die neueste Idee der Mensaleitung ist es, zu jeder Hauptmahlzeit ein Stück Brot, eine Suppe und/oder ein Dessert zu reichen. Um die beliebteste Kombination aus Brot, Suppe und/oder Dessert zu erfahren, startet die Mensaleitung eine Umfrage unter den Studierenden, die zu folgenden drei Anforderungen X , Y und Z führt:

X : Wenn Suppe serviert wird, dann soll kein Dessert gereicht werden.

Y : Es soll genau dann Brot oder Dessert geben, wenn auch Suppe serviert wird.

Z : Falls Suppe aber kein Dessert gereicht wird, soll es kein Brot geben.

- Geben Sie für jede der Anforderungen X , Y und Z eine aussagenlogische Formel an, die die jeweilige Anforderung widerspiegelt (ähnlich zu Beispiel 3.16 und 3.17 im Skript). Benutzen Sie dafür die Aussagenvariablen B (es gibt Brot), D (es gibt Dessert) und S (es gibt Suppe).
- Stellen Sie eine aussagenlogische Formel φ auf, die die Aussagenvariablen B , D und S benutzt und die aussagt, dass alle Anforderungen gleichzeitig gelten sollen.
- Geben Sie für Ihre Formel φ aus (b) eine Belegung an, die besagt, dass es Dessert und Suppe, aber kein Brot gibt. Erfüllt diese Belegung die Formel φ ?
- Welche Kombination(en) von Brot, Suppe und/oder Dessert kann die Mensaleitung wählen, um allen Anforderungen gerecht zu werden? Überlegen Sie sich dazu anhand einer Wahrheitstafel, welche Belegung(en) die Formel φ aus (b) erfüllen.

Aufgabe 3:**(25 Punkte)**

Auf einer einsamen Insel leben nur Ritter und Knappen. Während die Ritter immer die Wahrheit sagen, lügen die Knappen ständig. Als Besucher kommen Sie auf die Insel und treffen die drei Bewohner Adrian, Ben und Colin. Jeder von diesen Bewohnern behauptet etwas über die anderen. Diese Behauptungen sind im Folgenden durch aussagenlogische Formeln repräsentiert:

- Adrian behauptet: $\varphi_A := (\neg B \wedge C)$
- Ben behauptet: $\varphi_B := \neg A$
- Colin behauptet: $\varphi_C := \neg(\neg A \vee \neg B)$

Dabei bedeuten die Aussagenvariablen:

- A : Adrian sagt die Wahrheit.
 - B : Ben sagt die Wahrheit.
 - C : Colin sagt die Wahrheit.
- (a) Beschreiben Sie umgangssprachlich, was jede der Formeln φ_A , φ_B und φ_C aussagt.
- (b) Wer von Adrian, Ben und Colin ist Ritter, wer ist Knappe?
Hinweis: Beachten Sie dazu, dass die drei Aussagen, die durch φ_A , φ_B und φ_C repräsentiert werden, wahr oder falsch sein müssen, abhängig davon, ob der jeweils Aussagende lügt oder die Wahrheit sagt.

Aufgabe 4:**(28 Punkte)**

Es sei die aussagenlogische Formel

$$\varphi := \neg(((V_1 \leftrightarrow \neg V_2) \vee (V_3 \wedge V_2)) \rightarrow V_1)$$

gegeben.

- (a) Beweisen Sie, dass $\varphi \in \text{AL}$.
- (b) Geben Sie $\text{Var}(\varphi)$ an.
- (c) Berechnen Sie für die Belegung $\mathcal{B} : \text{Var}(\varphi) \rightarrow \{0, 1\}$ mit $\mathcal{B}(V_1) = 0$, $\mathcal{B}(V_2) = 1$ und $\mathcal{B}(V_3) = 0$ den Wert $\llbracket \varphi \rrbracket^{\mathcal{B}}$ in nachvollziehbaren Schritten analog zu Beispiel 3.10 aus der Vorlesung.
- (d) Geben Sie den Syntaxbaum der Formel φ an.
- (e) Geben Sie die ASCII-Darstellung der Formel φ an.
- (f) Eine aussagenlogische Formel φ heißt erfüllbar, falls es (mindestens) eine zu φ passende Belegung $\mathcal{B} : \text{Var}(\varphi) \rightarrow \{0, 1\}$ gibt, so dass $\llbracket \varphi \rrbracket^{\mathcal{B}} = 1$. Ist die Formel φ erfüllbar?