Goethe-Universität Frankfurt am Main
Institut für Informatik
Theorie komplexer Systeme
Prof. Dr. Nicole Schweikardt

28. Oktober 2009

Diskrete Modellierung

Wintersemester 2009/2010

Übungsblatt 2

Abgabe: *bis 4. November 2009, 8.15 Uhr (vor der Vorlesung oder in Raum RM 11-15/113)*

Bitte achten Sie darauf, dass Sie auf der Abgabe Ihrer Lösung Ihren Namen, Ihre Matrikelnummer und Ihre Übungsgruppe angeben. Mehrseitige Abgaben müssen zusammengeheftet werden.

Eine Aufgabe gilt nur dann als bearbeitet, wenn neben der Lösung auch die notwendigen Begründungen angegeben sind – es sei denn, in der Aufgabenstellung steht, dass eine solche Begründung nicht erforderlich ist.

Aufgabe 1: (30 Punkte)

In dieser Aufgabe betrachten wir eine Variante des unter dem Namen *Nim* bekannten Spiels, die wie folgt definiert ist: Es gibt zwei Spieler namens Alice und Bob. Zu Beginn des Spiels liegen fünf Hölzer auf dem Tisch. Die beiden Spieler sind abwechselnd am Zug. In jedem Zug kann der Spieler, der gerade an der Reihe ist, entscheiden, ob er ein Holz oder zwei Hölzer vom Tisch wegnimmt. Der Spieler, der das letzte Holz vom Tisch nimmt, verliert das Spiel. Zu Beginn ist Alice am Zug.

Modellieren Sie zur Beantwortung der folgenden Fragen das Spiel analog zum Beispiel 1.1 aus der Vorlesung durch ein Transitionssystem. Überlegen Sie sich zunächst, welche Zustände und Zustandsübergänge auftreten können.
Hinweis: Jeder Zustand des Transitionssystems sollte Informationen darüber enthalten, welcher Spieler am Zug ist und wie viele Hölzer noch auf dem Tisch liegen.

(a) Ist es eine gute Idee für Alice, im ersten Zug zwei Hölzer zu nehmen?

(b) Eine Gewinnstrategie für einen Spieler in diesem Spiel ist eine Vorschrift, welche ihm sagt, welchen Zug er als nächstes tätigen soll. Hält sich der Spieler an diese Vorschrift, so gewinnt er auf jeden Fall. Existiert in diesem Spiel eine Gewinnstrategie für Alice?

(c) Existiert eine Gewinnstrategie für Bob?

Aufgabe 2: (25 Punkte)

(a) Geben Sie alle Relationen von $A := \{a, b\}$ nach $B := \{i, j\}$ an. Geben Sie für jede Relation an, ob sie eine Funktion von A nach B oder eine partielle Funktion von A nach B oder keines von beiden ist. Geben Sie außerdem für jede Funktion an, ob sie injektiv, surjektiv und/oder bijektiv ist.

(b) Geben Sie für jede der folgenden Funktionen f an, ob die Funktion injektiv, surjektiv und/oder bijektiv ist. Geben Sie jeweils auch das Bild von f an.

(i) $f\colon \mathbb{Z} \to \{-1, 1\}$ mit $f(x) := (-1)^x$ für alle $x \in \mathbb{Z}$

(ii) $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ mit $f(x) := x^3$ für alle $x \in \mathbb{Z}$

(iii) $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}_{>0}$ mit $f(x) := x + 1$ für alle $x \in \mathbb{N}$

(iv) $f\colon A^* \to \mathbb{N}$ für eine beliebige Menge A mit $|A| = 1$ und $f(w) := |w|$ für alle $w \in A^*$

(v) $f\colon A^* \to \mathbb{N}$ für eine beliebige Menge A mit $|A| \geq 2$ und $f(w) := |w|$ für alle $w \in A^*$

(c) Wie viele Möglichkeiten gibt es,

(i) drei Bälle B_1, B_2, B_3 so auf drei Körbe K_1, K_2, K_3 zu verteilen, dass kein Korb leer bleibt? D.h. wie viele bijektive Funktionen von $\{B_1, B_2, B_3\}$ nach $\{K_1, K_2, K_3\}$ gibt es?

(ii) drei Bälle B_1, B_2, B_3 so auf drei Körbe K_1, K_2, K_3 zu verteilen, dass mindestens ein Korb leer bleibt? D.h. wie viele nicht surjektive Funktionen von $\{B_1, B_2, B_3\}$ nach $\{K_1, K_2, K_3\}$ gibt es?

Aufgabe 3: **(30 Punkte)**

Beweisen Sie Satz 2.38(b), d.h.: Sei B eine Menge, sei A eine endliche Menge und sei $k := |A|$. Zeigen Sie, dass es eine bijektive Funktion von $\mathrm{Abb}(A, B)$ nach B^k gibt.

Aufgabe 4: **(15 Punkte)**

Es seien m Mengen $M_1, \ldots, M_m$ für ein $m \in \mathbb{N}_{>0}$ gegeben. Beweisen Sie die folgende Aussage:

> Falls die Summe der Kardinalitäten der Mengen $M_1, \ldots, M_m$ größer als $n \in \mathbb{N}$ ist, so existiert eine Menge $M \in \{M_1, M_2, \ldots, M_m\}$ deren Kardinalität größer als $\frac{n}{m}$ ist.