Goethe-Universität Frankfurt am Main
Institut für Informatik
Theorie komplexer Systeme
Prof. Dr. Nicole Schweikardt

21. Oktober 2009

Diskrete Modellierung

Wintersemester 2009/2010

Übungsblatt 1

Abgabe: *bis 28. Oktober 2009, 8.15 Uhr (vor der Vorlesung oder in Raum RM 11-15/113)*

Bitte achten Sie darauf, dass Sie auf der Abgabe Ihrer Lösung Ihren Namen, Ihre Matrikelnummer und Ihre Übungsgruppe angeben. Mehrseitige Abgaben müssen zusammengeheftet werden.

Eine Aufgabe gilt nur dann als bearbeitet, wenn neben der Lösung auch die notwendigen Begründungen angegeben sind – es sei denn, in der Aufgabenstellung steht, dass eine solche Begründung nicht erforderlich ist.

Aufgabe 1: **(25 Punkte)**

Sei $U := \{1, 2, \ldots, 10\}$ ein festes Universum, und seien $M := \{7\}$, $N := \{1, 2, 9, 10\}$ und $P := \{2, 3, 5, 7\}$. Schreiben Sie jede der folgenden Mengen in extensionaler Form auf und geben Sie ihre Kardinalität an.

(a) $(N \setminus P) \cap M$

(b) $(\overline{P \setminus M})$

(c) $(P \triangle N) \cup M$

(d) $(\overline{N \cup P}) \cup (N \cap P)$

(e) $(P \setminus N)^2$

(f) $\mathcal{P}(\overline{N \cup P})$

(g) $((P \cap N) \cup M) \times \{4, 8\} \times (P \setminus M)$

(h) $\{Q : Q \subseteq N,\ |Q| \text{ ist gerade}\}$

Aufgabe 2: **(25 Punkte)**

(a) Für jede der folgenden Behauptungen beweisen Sie, dass die Behauptung für alle Mengen M, N, P gilt, oder widerlegen Sie die Behauptung, indem Sie Mengen M, N, P angeben und zeigen, dass die Behauptung für diese Mengen nicht gilt:

- **(i)** Falls $M \cup N \subseteq P$, dann $M \subseteq P$ und $N \subseteq P$.
- **(ii)** Falls $M \cap N \subseteq P$, dann $M \subseteq P$ oder $N \subseteq P$.
- **(iii)** Falls $M \in N$ und $N \in P$, dann $M \in P$.

(b) Geben Sie Mengen M, N und P in extensionaler Form an, so dass (iii) von Aufgabenteil (a) erfüllt ist, d.h. es soll gelten $M \in N$, $N \in P$ und $M \in P$.

Aufgabe 3: **(25 Punkte)**

Beweisen Sie die Korrektheit der folgenden Gleichungen.

(a) $M \cap (N \cup P) = (M \cap N) \cup (M \cap P)$.

(b) $\overline{M \cap N} = \overline{M} \cup \overline{N}$.

Aufgabe 4: **(25 Punkte)**

Abgeordnete des Deutschen Bundestages bilden Ausschüsse, die sich mit einem bestimmten Thema befassen. Sei A die Menge der Abgeordneten, die im Aussschuss Arbeit/Soziales sind und F die Menge der Abgeordneten die sich im Ausschuss Finanzen befinden. Außerdem sei S die Menge der Abgeordneten, die im Sport-Ausschuss sind. Es sind folgende Informationen über die Anzahl der Abgeordneten in den verschiedenen Aussschüssen bekannt:

$$|A| = 17, \quad |F| = 18, \quad |S| = 15, \quad |A \cap F| = 8, \quad |A \cap S| = 7, \quad |F \cap S| = 9, \quad |A \cap F \cap S| = 5$$

(a) Wie viele Abgeordnete sind in mindestens einem der Ausschüsse Mitglied?
D.h. berechnen Sie $|A \cup F \cup S|$.

(b) Wie viele der Abgeordneten sind in genau zwei Ausschüssen?
D.h. berechnen Sie $|((A \cap F) \cup (A \cap S) \cup (F \cap S)) \setminus (A \cap F \cap S)|$.

(c) Es soll ein Unterausschuss gebildet werden, dem alle Abgeordneten des Sport-Aussschusses angehören und zusätzlich alle Abgeodneten, die im Arbeit/Soziales- aber nicht im Finanz-Ausschuss sitzen. Wie viele Mitglieder hat dieser Unterausschuss?
D.h. berechnen Sie $|S \cup (A \setminus F)|$.

Hinweis: Überlegen Sie sich zunächst anhand von Venn-Diagrammen, wie man die Kardinalitäten der Mengen berechnen kann.