(b) Sei S eine Klasse endlicher σ-Strukturen und sei $C \subseteq S$.

C heißt Hanf-lokal in S, falls es eine Zahl $r \in \mathbb{N}$ gibt, so dass für alle $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \in S$ gilt:

Falls $\mathfrak{A} \rightleftarrows_r \mathfrak{B}$, so $(\mathfrak{A} \in C \iff \mathfrak{B} \in C)$.

Als einfache Folgerung aus dem Satz von Hanf erhält man:

Satz 3.30 (Hanf-Lokalität von FO)

Sei σ eine endliche relationale Signatur und sei S eine Klasse endlicher σ-Strukturen. Dann gilt für jeden FO$[\sigma]$-Satz φ:

$\{\mathfrak{A} \in S : \mathfrak{A} \models \varphi\}$ ist Hanf-lokal in S.

Beweis:

Sei $m := qr(\varphi)$ und sei $r := 3^m$.

Für $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \in S$ mit $\mathfrak{A} \rightleftarrows_r \mathfrak{B}$ gilt:

Für jeden 3^m-Umgebungstyp ρ ist $\#_\rho(\mathfrak{A}) = \#_\rho(\mathfrak{B})$.

Somit ist Voraussetzung (2) des Satzes von Hanf erfüllt.

Voraussetzungen (1) und (3) sind erfüllt, da $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ endlich sind und da σ keine Konstantensymbole enthält.

Gemäß Satz von Hanf gilt daher: $\mathfrak{A} \approx_m \mathfrak{B}$.

Wegen $m = qr(\varphi)$ gilt: $\mathfrak{A} \models \varphi \iff \mathfrak{B} \models \varphi$.

Somit ist $\{\mathfrak{A} \in S : \mathfrak{A} \models \varphi\}$ Hanf-lokal in S. $\square$

Bemerkung 3.31

Indem man zeigt, dass eine Klasse C nicht Hanf-lokal in S ist, kann man (unter Verwendung von Satz 3.30) folgern, dass C nicht FO-definierbar in S ist.

Dass C nicht Hanf-lokal in S ist, kann man dadurch zeigen, dass man für jede Zahl $r \in \mathbb{N}$ Strukturen $\mathfrak{A}_r \in C$ und $\mathfrak{B}_r \in S \setminus C$ mit $\mathfrak{A}_r \rightleftarrows_r \mathfrak{B}_r$ angibt.

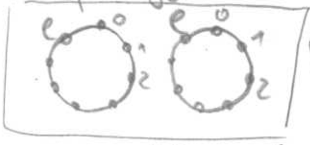
Beispiel 3.32

Die Verwendung der Hanf-Lokalität von FO liefert einen alternativen Beweis von Satz 3.25 (a): Conn ist nicht FO-definierbar in UGraphs.

Beweis: Gemäß Bemerkung 3.31 reicht es, zu zeigen, dass Conn nicht Hanf-lokal in UGraphs ist. Wir müssen also für jedes $r \in \mathbb{N}$ einen zusammenhängenden Graphen $\mathfrak{A}_r$ und einen nicht-zusammenhängenden Graphen $\mathfrak{B}_r$ finden, so dass $\mathfrak{A}_r \rightleftarrows_r \mathfrak{B}_r$.

Sei $r \in \mathbb{N}$ beliebig.

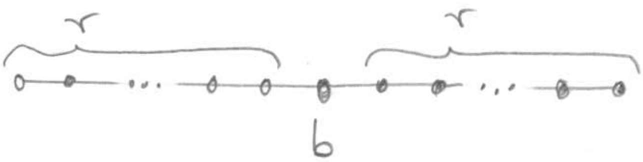
Als $\mathfrak{B}_r$ wählen wir einen Graph, der aus zwei disjunkten Kreisen auf je $\ell+1$ Knoten besteht, wobei $\ell \geq 2r+1$ ist.



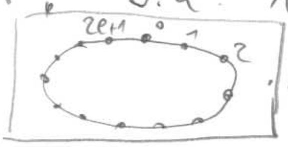
$\mathfrak{B}_r$

Wegen $\ell \geq 2r+1$ sieht jeder r-Umgebungstyp eines Knotens $b \in B_r$ folgendermaßen aus:

$\mathcal{N}_r^{\mathfrak{B}_r}(b)$:



Als Struktur $\mathfrak{A}_r$ wählen wir einen Kreis, der genausoviele Knoten wie $\mathfrak{B}_r$ hat, D.h. $\mathfrak{A}_r$ ist ein Kreis auf $2\ell+2$ Knoten.



$\mathfrak{A}_r$

Jeder r-Umgebungstyp eines Knotens $a \in A_r$ sieht folgendermaßen aus:

$\mathcal{N}_r^{\mathfrak{A}_r}(a)$:

D.h.: Für alle $a \in A_r$ und $b \in B_r$ ist $\mathcal{N}_r^{\mathfrak{A}_r}(a) \cong \mathcal{N}_r^{\mathfrak{B}_r}(b)$.

Somit gilt für jeden r-Umgebungstyp ρ: $\#_\rho(\mathfrak{A}_r) = \#_\rho(\mathfrak{B}_r)$,

also $\mathfrak{A}_r \rightleftarrows_r \mathfrak{B}_r$.

Wegen $\mathfrak{A}_r \in$ Conn, $\mathfrak{B}_r \in$ UGraphs $\setminus$ Conn ist Conn daher nicht Hanf-lokal in UGraphs, also auch nicht FO-definierbar in UGraphs.

$\square$ Bsp 3.32

3.5 Der Satz von Fraïssé

Die Charakterisierung der m-Äquivalenz durch EF-Spiele ist eine gute Sichtweise, um Beweisideen zu finden, indem man nach einer Gewinnstrategie für Duplicator im m-Runden EF-Spiel sucht. Um Nichtausdrückbarkeitsbeweise exakt aufschreiben zu können, ist die im Folgenden vorgestellte Charakterisierung von Fraïssé sehr elegant.

Definition 3.33 ($\mathrm{Part}(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$)

(a) Sind $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ σ-Strukturen, so bezeichnet $\mathrm{Part}(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ die Menge aller partiellen Isomorphismen von $\mathfrak{A}$ nach $\mathfrak{B}$.

(b) Wir schreiben $p: a_1, \dots, a_k \mapsto b_1, \dots, b_k$ um die Abbildung p mit $\mathrm{Def}(p) = \{a_1, \dots, a_k\}$ und $p(a_i) = b_i$ f.a. $i \in \{1, \dots, k\}$ zu bezeichnen.

(c) Oft identifizieren wir eine Abbildung p mit ihrem Graph $\{(a, p(a)) : a \in \mathrm{Def}(p)\}$.
Insbes. bedeutet $p \subseteq q$, dass q eine Erweiterung von p ist, d.h. $\mathrm{Def}(p) \subseteq \mathrm{Def}(q)$ und

$p(a) = q(a)$ f.a. $a \in Def(p)$.

Definition 3.34 ($W_m(\mathfrak{A},\mathfrak{B})$)

Sei σ eine Funktionen-freie Signatur.
$\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ seien σ-Strukturen, und sei $m \in \mathbb{N}$.
Die Menge $W_m(\mathfrak{A},\mathfrak{B})$ aller Gewinnpositionen für Duplicator besteht aus allen Abbildungen

$$p: \vec{a}', (c^{\mathfrak{A}})_{c\in\sigma} \mapsto \vec{b}', (c^{\mathfrak{B}})_{c\in\sigma},$$

für die $\vec{a}' = a_1',\dots,a_k' \in A$, $\vec{b}' = b_1',\dots,b_k' \in B$, $k \in \mathbb{N}$, sodass Duplicator das Spiel $\mathcal{G}_m(\mathfrak{A},\vec{a}',\mathfrak{B},\vec{b}')$ gewinnt.

Definition 3.35 (Hin-und-Her-System; m-Isomorphie)

Sei σ eine Funktionen-freie Signatur und sei $m \in \mathbb{N}$.
Zwei σ-Strukturen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ heißen m-isomorph (kurz: $\mathfrak{A} \cong_m \mathfrak{B}$), falls es eine Folge $(I_j)_{j=0,\dots,m}$ mit den folgenden 3 Eigenschaften gibt:

(1) Für jedes $j \in \{0,\dots,m\}$ ist $\emptyset \neq I_j \subseteq Part(\mathfrak{A},\mathfrak{B})$
(d.h. I_j ist eine nicht-leere Menge partieller Isomorphismen von $\mathfrak{A}$ nach $\mathfrak{B}$)

(2) "Hin-Eigenschaft": Für jedes $j<m$, jedes $p \in I_{j+1}$ und jedes $a \in A$ gibt es ein $q \in I_j$ s.d. $q \supseteq p$ und $a \in Def(q)$ (d.h. es gibt eine Erweiterung von p, in

deren Definitionsbereich a liegt).

(3) "<u>Her-Eigenschaft</u>": Für jedes $j<m$, jedes $p\in I_{j+1}$ und jedes $b\in B$ gibt es ein $q\in I_j$, so dass $q\supseteq p$ und $b\in \mathrm{Bild}(q)$ (d.h. es gibt eine Erweiterung von p, in deren Bild b liegt).

Falls $(I_j)_{j\le m}$ die Eigenschaften (1), (2) und (3) hat, so nennen wir $(I_j)_{j\le m}$ ein <u>Hin-und Her-System</u> (der Ordnung m), schreiben $(I_j)_{j\le m} : \mathfrak{A} \cong_m \mathfrak{B}$ und sagen <u>$\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ sind m-isomorph vermöge $(I_j)_{j\le m}$</u>.

Anschaulich bedeuten die Bedingungen (2) und (3) folgendes: In I_{j+1} liegen nur solche partiellen Isomorphismen p, die sich $(j+1)$-mal erweitern lassen. Die Erweiterungen $p_j, p_{j-1}, \dots, p_0$, die man dabei nacheinander erhält, sind allesamt partielle Isomorphismen, die in den Mengen $I_j, I_{j-1}, \dots, I_0$ liegen.

Der folgende Satz besagt, dass zwei Strukturen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ genau dann m-isomorph sind, wenn Duplicator das m-Runden EF-Spiel auf $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ gewinnt.