3.3 Logische Reduktionen

Satz 3.25 („Graphzusammenhang und Erreichbarkeit sind nicht FO-definierbar")

(a) Sei <u>UGraphs</u> die Klasse aller endlichen ungerichteten Graphen, d.h. aller Strukturen $G = (V, E^G)$ mit $|V| < \infty$ für die gilt: f.a. $v \in V$ ist $(v,v) \notin E^G$, und f.a. $v, w \in V$ ist $(v,w) \in E^G \iff (w,v) \in E^G$.

Sei <u>Conn</u> die Klasse aller endlichen ungerichteten zusammenhängenden Graphen.

Es gilt: Conn ist <u>nicht</u> FO-definierbar in UGraphs.

(b) Sei <u>RGraphs</u> die Klasse aller endlichen Graphen $G = (V, E^G, s^G, t^G)$ mit $s^G, t^G \in V$.

Sei <u>Reach</u> die Klasse aller $G \in$ RGraphs, in denen es einen Pfad vom Knoten s^G zum Knoten t^G gibt.

Es gilt: Reach ist <u>nicht</u> FO-definierbar in RGraphs.

<u>Beweis</u>:

<u>(a)</u> Durch Widerspruch.

Angenommen, φ ist ein FO[$\{E\}$]-Satz, so dass für jeden ungerichteten endlichen Graphen $G = (V, E^G)$ gilt: $G \models \varphi \iff G$ ist zusammenhängend.

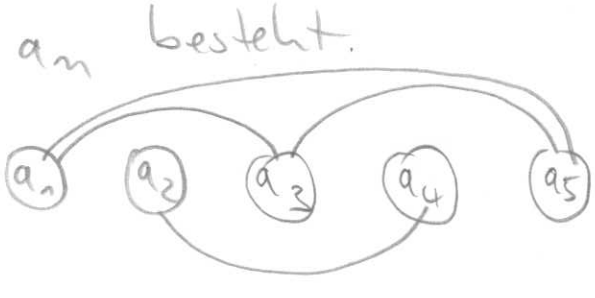
<u>Idee:</u> Nutze diesen Satz φ, um einen $FO[\{\leq\}]$-Satz ψ zu konstruieren, so dass für jede endliche lineare Ordnung $\mathfrak{A} = (A, \leq^{\mathfrak{A}})$ gilt:

$$\mathfrak{A} \models \psi \iff |A| \text{ ist gerade}$$

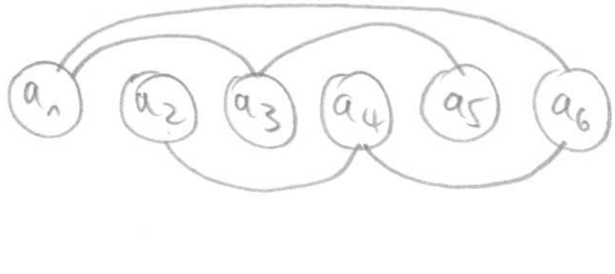
Von Satz 3.18 wissen wir bereits, dass es einen solchen Satz ψ nicht geben kann.

Um den Satz ψ zu konstruieren, ordnen wir jeder endlichen linearen Ordnung $\mathfrak{A} = (A, \leq^{\mathfrak{A}})$ mit $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ und $a_1 <^{\mathfrak{A}} a_2 <^{\mathfrak{A}} \ldots <^{\mathfrak{A}} a_n$ (für $n := |A|$) den Graphen $G_{\mathfrak{A}}$ mit Knotenmenge A zu, dessen Kantenmenge aus genau den Kanten zwischen a_i und a_{i+2}, f.a. $i \leq n-2$, und einer zusätzlichen Kante zwischen a_1 und a_n besteht.

<u>Skizze:</u> $|A| = 5 \Rightarrow G_{\mathfrak{A}}$:



$|A| = 6 \Rightarrow G_{\mathfrak{A}}$:



Man sieht leicht, dass folgendes gilt:

$G_{\mathfrak{A}}$ ist zusammenhängend $\iff$ $|A|$ ist gerade (*)

Sei nun $\chi_E(x,y)$ eine FO[{≤}]-Formel, die besagt

- "$y = x+2$" oder "$x = y+2$" oder
- ("$x = \min$" und "$y = \max$") oder
- ("$y = \min$" und "$x = \max$")

(klar: eine solche FO[≤]-Formel $\chi_E(x,y)$ lässt sich leicht konstruieren).

Ausgewertet in einer linearen Ordnung $\mathfrak{A}$ "simuliert" die Formel $\chi_E(x,y)$ gewissermaßen die Kantenrelation des Graphen $G_{\mathfrak{A}}$.

Sei nun ψ der FO[{≤}]-Satz, der aus dem FO[{E}]-Satz φ entsteht, indem jedes Atom der Form $E(z_1,z_2)$ durch die FO[{≤}]-Formel $\chi_E(z_1,z_2)$ ersetzt wird.

Der Satz ψ ist also gerade so konstruiert, dass beim Auswerten von ψ in $\mathfrak{A}$ die Auswertung von φ im Graphen $G_{\mathfrak{A}}$ simuliert wird.

Es gilt also:

$$\mathfrak{A} \models \psi \iff G_{\mathfrak{A}} \models \varphi$$

$$\underset{\text{Wahl von } \varphi}{\iff} G_{\mathfrak{A}} \text{ ist zusammenhängend}$$

$$\underset{(*)}{\iff} |A| \text{ ist gerade.}$$

Somit ist $\text{Even}_{\leq}$ FO-definierbar in $\text{Ord}_{\leq}$.

↯ Widerspruch zu Satz 3.18

□ (a)

(b) Übung. □

Bemerkung 3.26 (Logische Reduktionen)

Die im Beweis von Satz 3.25 benützte Vorgehensweise ist unter dem Begriff logische Reduktion bekannt.

Im Beweis von Satz 3.25 wurde das Problem, einen FO-Satz zu finden, der ausdrückt, dass eine lineare Ordnung gerade Kardinalität besitzt, auf das Problem reduziert, einen FO-Satz zu finden, der Graph-Zusammenhang definiert.

D.h. es wurde gezeigt: Falls Graph-Zusammenhang FO-definierbar ist, so ist auch die Aussage "eine lineare Ordnung hat gerade Kardinalität" FO-definierbar.

Dies wurde dadurch erreicht, dass man innerhalb einer linearen Ordnung einen geeigneten Graphen "simuliert" (bzw. "interpretiert"), indem man die Kantenrelation des Graphen durch eine FO-Formel beschreibt.

Generell ist diese Methode der logischen Reduktionen (bzw. "logischen Interpretationen") oft nützlich, um bereits bekannte Nicht-Definierbarkeits-Resultate auf neue Nicht-Definierbarkeits-Resultate zu übertragen.

3.4 Der Satz von Hanf

Der Satz von Hanf liefert ein hinreichendes Kriterium für die m-Äquivalenz zweier Strukturen, so dass man durch eine einfache Anwendung dieses Satzes leicht zeigen kann, dass $\mathfrak{A} \equiv_m \mathfrak{B}$, ohne dabei explizit eine Gewinnstrategie für Duplicator im m-Runden EF-Spiel konstruieren zu müssen.

Bevor wir die exakte Formulierung des Satzes von Hanf angeben können, benötigen wir noch ein paar Notationen.

<u>Definition 3.27</u> (Gaifman-Graph, Distanzfunktion, Nachbarschaft)

Sei σ eine funktionen-freie Signatur und sei $\mathfrak{A}$ eine σ-Struktur.

<u>(a)</u> Der <u>Gaifman-Graph</u> $G(\mathfrak{A})$ von $\mathfrak{A}$ ist der ungerichtete Graph mit Knotenmenge $V^{G(\mathfrak{A})} := A$ und Kantenmenge

$$E^{G(\mathfrak{A})} := \left\{ (u,v) \, : \, \begin{array}{l} u \neq v \text{ und es gibt ein } R \in \sigma \\ \text{und ein Tupel } (a_1, \dots, a_r) \in R^{\mathfrak{A}} \\ \text{s.d. } u, v \in \{a_1, \dots, a_r\} \end{array} \right\}$$

(b) Die <u>Distanzfunktion</u> $\mathrm{Dist}^{\mathfrak{A}} : A \times A \to \mathbb{N}$

ist definiert durch

$$\mathrm{Dist}^{\mathfrak{A}}(u,v) := \begin{cases} 0 & \text{falls } u = v \\ \infty & \text{falls } u \neq v \text{ und es in } G(\mathfrak{A}) \\ & \text{keinen Pfad von } u \text{ nach } v \text{ gibt} \\ \min\left\{ \ell \in \mathbb{N} : \begin{array}{l} \text{es gibt in } G(\mathfrak{A}) \text{ einen} \\ \text{Pfad der Länge } \ell \text{ von} \\ u \text{ nach } v \end{array} \right\}, & \text{sonst} \end{cases}$$

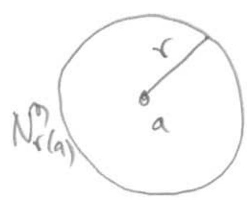
Ist $u \in A$ und $U \subseteq A$, so setzen wir

$$\mathrm{Dist}^{\mathfrak{A}}(u, U) := \min \left\{ \mathrm{Dist}^{\mathfrak{A}}(u,v) : v \in U \right\}$$

(c) Für ein $a \in A$ und eine Zahl $r \in \mathbb{N}$ ist die <u>r-Umgebung</u> (oder: <u>r-Nachbarschaft</u>) von a die Menge

$$N_r^{\mathfrak{A}}(a) := \left\{ a' \in A : \mathrm{Dist}^{\mathfrak{A}}(a,a') \leq r \right\}$$

Skizze:



Ist $U \subseteq A$, so setzen wir

$$N_r^{\mathfrak{A}}(U) := \left\{ a' \in A : \mathrm{Dist}^{\mathfrak{A}}(a', U) \leq r \right\} = \bigcup_{u \in U} N_r^{\mathfrak{A}}(u)$$

Ist $U = \{a_1, \ldots, a_k\}$, so schreiben wir auch $N_r^{\mathfrak{A}}(a_1, \ldots, a_k)$ an Stelle von $N_r^{\mathfrak{A}}(U)$.

(d) Ist $U \subseteq A$, so schreiben wir $\mathfrak{A}|_U$ für die durch die Menge U induzierte Substruktur von $\mathfrak{A}$, wobei in σ vorkommende Konstantensymbole ignoriert werden. D.h.:

$$\mathfrak{A}|_U := \left(U, \left(R^{\mathfrak{A}} \cap U^{ar(R)} \right)_{R \in \sigma} \right).$$

Insbes. ist $\mathfrak{A}|_U$ eine Struktur über der Signatur $\sigma \setminus \{c : c \text{ ist Konstantensymbol in } \sigma\}$.

(e) Ist $U \subseteq A$ und sind $a_1, \dots, a_i \in U$, so schreiben wir $(\mathfrak{A}|_U, a_1, \dots, a_i)$ für die Struktur

$$\left(U, \left(R^{\mathfrak{A}} \cap U^{ar(R)} \right)_{R \in \sigma}, a_1, \dots, a_i \right)$$

Insbes ist $(\mathfrak{A}|_U, a_1, \dots a_i)$ eine Struktur über einer Signatur, die aus den Relationssymbolen von σ und i zusätzlichen Konstantensymbolen besteht.

(f) Sind $a_1, \dots, a_i \in A$ so schreiben wir $\mathcal{N}_r^{\mathfrak{A}}(a_1, \dots, a_i)$ an Stelle von $\left(\mathfrak{A}|_{N_r^{\mathfrak{A}}(a_1, \dots, a_i)}, a_1, \dots, a_i\right)$.

Definition 3.28 (r-Umgebungstypen)

Sei σ eine Funktionen-freie Signatur, $\mathfrak{A}$ eine σ-Struktur, $a \in A$, $r \in \mathbb{N}$.

(a) Der r-Umgebungstyp von a in $\mathfrak{A}$ die Struktur

$$\mathcal{N}_r^{\mathfrak{A}}(a) \stackrel{\text{Def}}{=} \left(\mathfrak{A}|_{N_r^{\mathfrak{A}}(a)}, a \right)$$

(b) Ist ρ ein r-Umgebungstyp, so bezeichnet

$$\#_\rho(\mathfrak{A}) := \left| \{ a' \in A : \mathcal{N}_r^{\mathfrak{A}}(a') \cong \rho \} \right|$$

die Anzahl der Elemente in A, deren r-Umgebungstyp isomorph zu ρ ist.

Satz 3.28 (Satz von Hanf, 1965)

Sei σ eine Funktionen-freie Signatur, seien $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ σ-Strukturen und sei $m \in \mathbb{N}$. Falls gilt:

(1) es gibt eine Zahl $e \geq 1$, so dass jede 3^m-Umgebung eines Elements in $\mathfrak{A}$ bzw $\mathfrak{B}$ höchstens e Elemente besitzt, und

(2) für jeden 3^m-Umgebungstyp ρ ist

$$\#_\rho(\mathfrak{A}) = \#_\rho(\mathfrak{B}) \quad \text{oder} \quad \#_\rho(\mathfrak{A}), \#_\rho(\mathfrak{B}) \geq (m+k) \cdot e,$$

wobei k die Anzahl der Konstantensymbole in σ ist, und

(3) σ enthält kein(e) Konstantensymbol(e) oder für $\vec{c}^{\mathfrak{A}} := (c^{\mathfrak{A}})_{c\in\sigma}$ und $\vec{c}^{\mathfrak{B}} := (c^{\mathfrak{B}})_{c\in\sigma}$ gilt:

$$\mathcal{N}^{\mathfrak{A}}_{3^m}(\vec{c}^{\mathfrak{A}}) \cong \mathcal{N}^{\mathfrak{B}}_{3^m}(\vec{c}^{\mathfrak{B}}).$$

dann ist $\mathfrak{A} \approx_m \mathfrak{B}$.

(Beachte: Falls $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ endlich sind, so kann man Bedingung (1) z.B. dadurch erfüllen, dass man $e := \max\{|A|, |B|\}$ wählt)

Beweis:

Seien $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, m$ gegeben, die die Voraussetzungen des Satzes erfüllen.
Um zu zeigen, dass $\mathfrak{A} \approx_m \mathfrak{B}$ ist, zeigen wir, dass Duplicator im Spiel $\mathfrak{G}_m(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ so spielen kann, dass für jedes $i \in \{0, 1, \dots, m\}$ gilt:

$(*)_i$: Sind $a_1, \dots, a_i$ bzw. $b_1, \dots, b_i$ die in den ersten i Runden gewählten Elemente in A und B, so gilt:

$$\mathcal{N}^{\mathfrak{A}}_{r_i}(\vec{c}^{\mathfrak{A}}, a_1, \dots, a_i) \cong \mathcal{N}^{\mathfrak{B}}_{r_i}(\vec{c}^{\mathfrak{B}}, b_1, \dots, b_i)$$

Für $i \in \{0,1,\dots,m\}$ sind die Zahlen $r_i \in \mathbb{N}$ dabei so gewählt, dass gilt: $r_m = 0$ und für alle $i<m$ ist $r_i = 3r_{i+1} + 1$

(Einfaches Nachrechnen zeigt, dass $r_i = \frac{3^{m-i}-1}{2}$.

Insbes ist $r_0 = \frac{3^m - 1}{2} \leq 3^m$).

Per Induktion nach i zeigen wir, dass Dupl. so spielen kann, dass nach Runde i die Bedingung $(*)_i$ erfüllt ist.

$\underline{i=0}$: Falls σ kein(e) Konstantensymbol(e) enthält, so sagt $(*)_0$ nichts aus.

Falls σ Konstantensymbole enthält, so ist $(*)_0$ gemäß Voraussetzung $\underline{(3)}$ erfüllt (beachte, dass $r_0 \leq 3^m$).

$\underline{i \to i+1}$: Gemäß Induktionsannahme ist $(*)_i$ nach Runde i erfüllt.

Wir müssen zeigen, dass Duplicator in Runde $i+1$ so spielen kann, dass $(*)_{i+1}$ nach Runde $i+1$ erfüllt ist.

Wir betrachten hier nur den Fall, dass Spoiler in Runde $i+1$ ein Element a_{i+1} in A wählt. (Der Fall, dass Sp. ein b_{i+1} in B wählt, kann analog, durch Vertauschen der Rollen von $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ behandelt werden.)

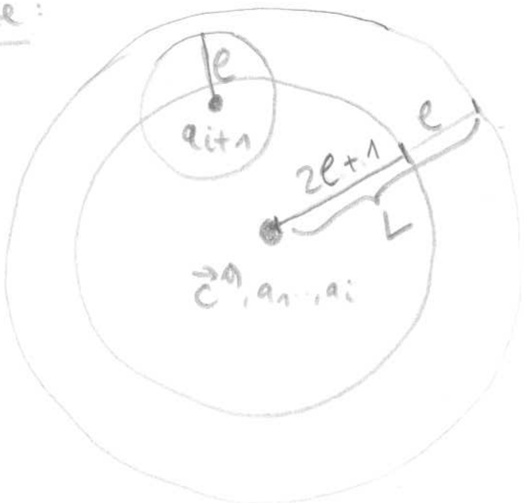
Sei $\ell := r_{i+1}$ und $L := r_i$. Gemäß der Wahl der r_i gilt: $L = 3\ell + 1$. Gemäß $(*)_i$ gibt es einen

Isomorphismus $\boxed{\pi : \mathcal{N}_L^{\mathfrak{A}}(\vec{c}^{\mathfrak{A}}, a_1 .. a_i) \cong \mathcal{N}_L^{\mathfrak{B}}(\vec{c}^{\mathfrak{B}}, b_1, \dots, b_i)}$ ⊛

Sei $a_{i+1} \in A$ das von Sp. in Runde $i+1$ gewählte Element.

<u>Fall 1</u>: $a_{i+1} \in N_{2\ell+1}^{\mathfrak{A}}(\vec{c}^{\mathfrak{A}}, a_1 .. a_i)$

<u>Skizze</u>:



Es gilt: $N_\ell^{\mathfrak{A}}(a_{i+1}) \subseteq N_L^{\mathfrak{A}}(\vec{c}^{\mathfrak{A}}, a_1 .. a_i)$, und

daher $N_\ell^{\mathfrak{A}}(\vec{c}^{\mathfrak{A}}, a_1, \dots, a_i, a_{i+1}) \subseteq N_L^{\mathfrak{A}}(\vec{c}, a_1 .. , a_i)$

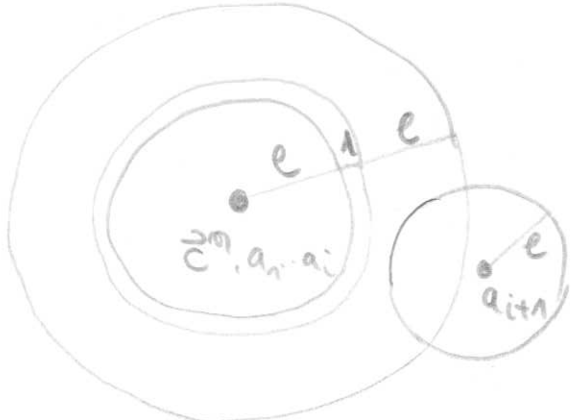
Für $b_{i+1} := \pi(a_{i+1})$ folgt daher aus ⊛, dass

$$\mathcal{N}_\ell^{\mathfrak{A}}(\vec{c}^{\mathfrak{A}}, a_1, \dots, a_i, a_{i+1}) \cong \mathcal{N}_\ell^{\mathfrak{B}}(\vec{c}^{\mathfrak{B}}, b_1, \dots, b_i, b_{i+1}),$$

und somit ist $⊛_{i+1}$ erfüllt, wenn Dupl. in Runde $i+1$ das Element b_{i+1} wählt.

Fall 2: $a_{i+1} \notin N_{2\ell+1}^{\mathfrak{A}}(\vec{c}, a_1, \ldots, a_i)$

Skizze:



Es gilt: $\mathrm{Dist}^{\mathfrak{A}}(a_{i+1}, \{\vec{c}^{\mathfrak{A}}, a_1, \ldots, a_i\}) > 2\ell+1$, d.h.

$N_\ell^{\mathfrak{A}}(\vec{c}^{\mathfrak{A}}, a_1, \ldots, a_i) \cap N_\ell^{\mathfrak{A}}(a_{i+1}) = \emptyset$ und

kein Tupel einer Relation in $\mathfrak{A}$ enthält sowohl Elemente aus $\mathcal{N}_\ell^{\mathfrak{A}}(\vec{c}^{\mathfrak{A}}, a_1, \ldots, a_i)$ als auch Elemente aus $\mathcal{N}_\ell^{\mathfrak{A}}(a_{i+1})$.

Somit ist $\mathcal{N}_\ell^{\mathfrak{A}}(\vec{c}^{\mathfrak{A}}, a_1, \ldots, a_i, a_{i+1})$ die "disjunkte Vereinigung" der beiden Strukturen $\mathcal{N}_\ell^{\mathfrak{A}}(\vec{c}, a_1, \ldots, a_i)$ und $\mathcal{N}_\ell^{\mathfrak{A}}(a_{i+1})$.

Um $\circledast_{i+1}$ zu gewährleisten, genügt es daher, ein $b_{i+1} \in B$ zu finden, für das gilt:

(I) $\mathcal{N}_\ell^{\mathfrak{B}}(b_{i+1}) \cong \mathcal{N}_\ell^{\mathfrak{A}}(a_{i+1})$ und

(II) $b_{i+1} \notin N_{2\ell+1}^{\mathfrak{B}}(\vec{c}^{\mathfrak{B}}, b_1, \ldots, b_i)$.

(Beachte: Dann gilt nämlich $\mathcal{N}_\ell^{\mathfrak{A}}(\vec{c}^{\mathfrak{A}}, a_1 \ldots a_i a_{i+1}) \cong \mathcal{N}_\ell^{\mathfrak{B}}(\vec{c}^{\mathfrak{B}}, b_1 \ldots b_i b_{i+1})$)

Sei ρ der ℓ-Umgebungstyp von a_{i+1} in $\mathfrak{A}$, d.h.

$\rho := \mathcal{N}_\ell^{\mathfrak{A}}(a_{i+1})$

Man sieht leicht, dass aus Voraussetzung (2) wegen $\ell \leq 3^m$ folgt:

$$\text{①}: \boxed{\#_\rho(\mathfrak{A}) = \#_\rho(\mathfrak{B}) \quad \text{oder} \quad \#_\rho(\mathfrak{A}),\ \#_\rho(\mathfrak{B}) \geq (k+m)\cdot e}$$

Aus $\circledast_i$ und $L = 3\ell+1$ und Voraussetzung (1) folgt außerdem:

$$\text{②}: \boxed{\begin{aligned} &|\{a' \in N_{2\ell+1}^{\mathfrak{A}}(\vec{c}^{\mathfrak{A}}, a_1 .. a_i) : \mathcal{N}_\ell^{\mathfrak{A}}(a') \cong \rho\}| \\ \underset{\circledast_i}{=}\ &|\{b' \in N_{2\ell+1}^{\mathfrak{B}}(\vec{c}^{\mathfrak{B}}, b_1 .. b_i) : \mathcal{N}_\ell^{\mathfrak{B}}(b') \cong \rho\}| \\ \underset{(1)}{\leq}\ &(k+m-1)\cdot e \end{aligned}}$$

Aus ① und ② folgt für

$$z := |\{b' \in B : b' \notin N_{2\ell+1}^{\mathfrak{B}}(\vec{c}^{\mathfrak{B}}, b_1 .. b_i) \text{ und } \mathcal{N}_\ell^{\mathfrak{B}}(b') \cong \rho\}|,$$

dass

$$z = |\{a' \in A : a' \notin N_{2\ell+1}^{\mathfrak{A}}(\vec{c}^{\mathfrak{A}}, a_1, .., a_i) \text{ und } \mathcal{N}_\ell^{\mathfrak{A}}(a') \cong \rho\}|$$
$$\geq 1 \quad (\text{da } a_{i+1} \notin N_{2\ell+1}^{\mathfrak{A}}(\vec{c}^{\mathfrak{A}}, a_1 .. a_i) \text{ und } \mathcal{N}_\ell^{\mathfrak{A}}(a_{i+1}) \cong \rho)$$

oder

$$z \geq (k+m)\cdot e - (k+m-1)\cdot e = e \geq 1$$

Wegen $z \geq 1$ kann Dupl. also ein $b_{i+1} \in B$ finden mit

$\mathcal{N}_\ell^{\mathfrak{B}}(b_{i+1}) \cong \mathcal{N}_\ell^{\mathfrak{A}}(a_{i+1})$ und $b_{i+1} \notin N_{2\ell+1}^{\mathfrak{B}}(\vec{c}^{\mathfrak{B}}, b_1, .., b_i)$.

Die Bedingung $\circledast_{i+1}$ ist dann nach Runde $i+1$ erfüllt.

Für $i=m$ gilt insbes. nach Runde m, dass (beachte: $r_m = 0$)

$$\mathcal{N}_0^{\mathfrak{A}}(\vec{c}^{\mathfrak{A}}, a_1, \dots, a_m) \cong \mathcal{N}_0^{\mathfrak{B}}(\vec{c}^{\mathfrak{B}}, b_1, \dots, b_m),$$

d.h. Duplicator hat die Partie gewonnen.

$\square_{\text{Satz von Hanf}}$

Die Hanf-Lokalität der Logik erster Stufe:

Der Satz von Hanf liefert ein hinreichendes Kriterium, mit dem man leicht zeigen kann, dass zwei Strukturen m-äquivalent sind.

Der Satz von Hanf besagt, dass alle FO-Sätze der Quantorentiefe m in dem Sinne "lokal" sind, dass sie nur über Umgebungen vom Radius 3^m "sprechen können".

Im Folgenden wird diese Lokalität der Logik erster Stufe etwas genauer dargestellt.

Definition 3.29 (Hanf-Lokalität)

Sei σ eine relationale Signatur (d.h. σ enthält keine Funktions- und keine Konstantensymbole).

(a) Seien $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ endliche σ-Strukturen und sei $r \in \mathbb{N}$.
$\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ heißen <u>r-bijektiv</u>, kurz: $\mathfrak{A} \rightleftarrows_r \mathfrak{B}$, falls für jeden r-Umgebungstyp ρ gilt: $\#_\rho(\mathfrak{A}) = \#_\rho(\mathfrak{B})$.