Dann gilt:

Even$_\leq$ ist <u>nicht</u> FO-definierbar in Ord$_\leq$.

<u>Beweis:</u>

Nütze Korollar 3.17 (mit $S := \text{Ord}_\leq$ und $C := \text{Even}_\leq$).

Für jedes $m \in \mathbb{N}$ sei $\mathfrak{A}_m := (A, \leq^{\mathfrak{A}_m})$ eine lineare Ordnung mit $|A| = 2^m + 2$ und sei $\mathfrak{B}_m := (B, \leq^{B})$ eine lineare Ordnung mit $|B| = 2^m + 1$.

Somit ist $\mathfrak{A}_m \in \text{Even}_\leq$ und $\mathfrak{B}_m \in \text{Ord}_\leq \setminus \text{Even}_\leq$.

Aus Satz 3.11 folgt, dass $\mathfrak{A}_m \approx_m \mathfrak{B}_m$.

Korollar 3.17 liefert daher, dass Even$_\leq$ <u>nicht</u> FO-definierbar ist in Ord$_\leq$ $\square$

<u>Beweis des Satzes von Ehrenfeucht</u>

Wir nützen folgende Notation:

<u>Definition 3.19</u>

σ sei eine Funktionen-freie Signatur, $\mathfrak{A}$ eine σ-Struktur, $k \in \mathbb{N}$, $\vec{a} = a_1, \dots, a_k$ eine Folge von Elementen aus A und $\vec{x} = x_1, \dots, x_k$ eine Folge von k verschiedenen Elementen aus Var.

Wir definieren induktiv für jedes $m \in \mathbb{N}$ eine

$FO[\sigma]$-Formel $\varphi^m_{\mathfrak{A},\vec{a}'}(\vec{x})$ der Quantorentiefe m

wie folgt:

$$\varphi^0_{\mathfrak{A},\vec{a}'}(\vec{x}) := \bigwedge \left\{ \psi(\vec{x}) : \begin{array}{l} \psi \text{ ist eine atomare} \\ \text{oder eine negierte} \\ \text{atomare } FO[\sigma]\text{-Formel} \\ \text{mit } \mathrm{frei}(\psi) \subseteq \{x_1, \dots, x_k\} \\ \text{und } \mathfrak{A} \models \psi[\vec{a}'] \end{array} \right\}$$

(wir nutzen hier folgende Notation: Für eine endliche Menge M von Formeln schreiben wir $\bigwedge M$, um die Formel $\bigwedge_{\psi \in M} \psi$, d.h. die Konjunktion über alle Formeln aus M, zu bezeichnen).

Für $m > 0$ setzen wir

$$\varphi^m_{\mathfrak{A},\vec{a}'}(\vec{x}) := \bigwedge_{a \in A} \exists x_{k+1}\, \varphi^{m-1}_{\mathfrak{A},\vec{a}' a_{k+1}}(\vec{x}, x_{k+1}) \;\wedge$$

$$\forall x_{k+1} \bigvee_{a \in A} \varphi^{m-1}_{\mathfrak{A},\vec{a}', a_{k+1}}(\vec{x}, x_{k+1}).$$

Die Formel $\varphi^m_{\mathfrak{A},\vec{a}'}(\vec{x})$ heißt <u>m-Isomorphietyp</u> (oder m-Hintikka-Formel) von $\vec{a}'$ in $\mathfrak{A}$.

Bemerkung 3.20

(a) In Def. 3.19 ist $k=0$ erlaubt.
Der m-Isomorphietyp ist dann ein Satz $\varphi^m_{\mathfrak{A}}$.

(b) Für alle $k, m \in \mathbb{N}$ ist die Menge

$$m\text{-Typen}_k := \left\{ \varphi^m_{\mathfrak{A},\vec{a}'}(\vec{x}) : \begin{array}{l} \mathfrak{A} \text{ ist eine} \\ \sigma\text{-Struktur und} \\ \vec{a}' \in A^k \end{array} \right\}$$

endlich
(Für $m=0$ gilt das, da es nur endlich viele verschiedene atomare $FO[\sigma]$-Formeln über den Variablen $x_1, \ldots, x_k$ gibt.
Für $m>0$ folgt die Endlichkeit dann per Induktion.)

(c) $\mathfrak{A} \models \varphi^m_{\mathfrak{A},\vec{a}'}[\vec{a}']$
(Dies folgt leicht per Induktion nach m).

Wir beweisen nun folgende, stärkere Version des Satzes von Ehrenfeucht. (Man sieht leicht, dass Satz 3.15 unmittelbar aus dem folgenden Satz folgt).

Satz 3.21 (Ehrenfeucht, 1961)

Sei σ eine Funktionen-freie Signatur, seien $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ zwei σ-Strukturen, seien $k, m \in \mathbb{N}$ und $\vec{a}' = a_1', \dots, a_k' \in A$ und $\vec{b}' = b_1', \dots, b_k' \in B$.

Dann sind äquivalent:

(a) Duplicator hat eine Gewinnstrategie im Spiel $\mathcal{G}_m(\mathfrak{A}, \vec{a}', \mathfrak{B}, \vec{b}')$

(b) $\mathfrak{B} \models \varphi^m_{\mathfrak{A}, \vec{a}'}[\vec{b}']$

(c) F.a. $FO[\sigma]$-Formeln ψ mit $\text{frei}(\psi) \subseteq \{x_1, \dots, x_k\}$ und $qr(\psi) \leq m$ gilt:

$$\mathfrak{A} \models \psi[\vec{a}'] \iff \mathfrak{B} \models \psi[\vec{b}']$$

Beweis:

"(c) $\Rightarrow$ (b)". Es gilt $qr(\varphi^m_{\mathfrak{A}, \vec{a}'}) = m$ und $\mathfrak{A} \models \varphi^m_{\mathfrak{A}, \vec{a}'}[\vec{a}']$. Aus (c) folgt daher: $\mathfrak{B} \models \varphi^m_{\mathfrak{A}, \vec{a}'}[\vec{b}']$.

"(a) $\iff$ (b)" Per Induktion nach m.

$m = 0$: Dupl. gewinnt $\mathcal{G}_0(\mathfrak{A}, \vec{a}', \mathfrak{B}, \vec{b}')$

$\overset{\text{Gewinnbedingung}}{\iff}$ die Abbildung π mit $\pi(a_i') := b_i'$ (f.a. $i = 1, .., k$) und $\pi(c^{\mathfrak{A}}) = c^{\mathfrak{B}}$ (f.a. $c \in \sigma$) ist ein partieller Isomorphismus von $\mathfrak{A}$ nach $\mathfrak{B}$.

$\overset{\text{Def. von } \varphi^0_{\mathfrak{A}, \vec{a}'}}{\iff}$ $\mathfrak{B} \models \varphi^0_{\mathfrak{A}, \vec{a}'}[\vec{b}']$

$m \mapsto m+1$:

Dupl. gewinnt $G_{m+1}(\mathfrak{A}, \vec{a}', \mathfrak{B}, \vec{b}')$

$\iff$ f.a. $a \in A$ ex. $b \in B$ s.d. Dupl. $G_m(\mathfrak{A}, \vec{a}'a, \mathfrak{B}, \vec{b}'b)$ gewinnt
und
f.a. $b \in B$ ex $a \in A$ s.d. Dupl. $G_m(\mathfrak{A}, \vec{a}'a, \mathfrak{B}, \vec{b}'b)$ gewinnt

$\underset{\text{Ind.ann.}}{\iff}$ f.a. $a \in A$ ex $b \in B$ s.d. $\mathfrak{B} \models \varphi^m_{\mathfrak{A}, \vec{a}'a}[\vec{b}', b]$
und
f.a. $b \in B$ ex $a \in A$ s.d. $\mathfrak{B} \models \varphi^m_{\mathfrak{A}, \vec{a}'a}[\vec{b}', b]$

$$\iff \mathfrak{B} \models \Big(\bigwedge_{a \in A} \exists x_{k+1}\, \varphi^m_{\mathfrak{A}, \vec{a}'a}(\vec{x}, x_{k+1}) \wedge \forall x_{k+1} \bigvee_{a \in A} \varphi^m_{\mathfrak{A}, \vec{a}'a}(\vec{x}, x_{k+1}) \Big) [\vec{b}']$$

$$\underset{\text{Def. } \varphi^{m+1}_{\mathfrak{A}, \vec{a}'}}{\iff} \mathfrak{B} \models \varphi^{m+1}_{\mathfrak{A}, \vec{a}'}[\vec{b}']$$

$\square$ (a) $\iff$ (b)

"(a) $\Rightarrow$ (c)": Per Induktion nach m.

$m=0$: Wie bei "(b) $\Rightarrow$ (a)"

$m \mapsto m+1$: Gemäß Voraussetzung gewinnt Dupl. $G_{m+1}(\mathfrak{A}, \vec{a}', \mathfrak{B}, \vec{b}')$.

Sei $\psi(\vec{x})$ eine $FO[\sigma]$-Formel mit $\text{frei}(\psi) \subseteq \{x_1, \dots, x_k\}$
und $qr(\psi) \leq m+1$

Zu zeigen: $\mathfrak{A} \models \psi[\vec{a}'] \iff \mathfrak{B} \models \psi[\vec{b}']$ (*)

Klar: Die Menge aller Formeln ψ, die die Bedingung (*) erfüllen, ist abgeschlossen unter Booleschen Kombinationen (d.h. $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$) und enthält gemäß Induktionsannahme alle Formeln der Quantorentiefe $\leq m$.

Wir müssen daher OBdA nur noch den Fall betrachten, dass ψ von der Form $\exists x_{k+1}\, \chi(\vec{x}, x_{k+1})$ ist, wobei $qr(\chi) = m$.

Zu zeigen: $\mathfrak{A} \models \left(\exists x_{k+1}\, \chi(\vec{x}, x_{k+1})\right)[\vec{a}']$

$\iff \mathfrak{B} \models \left(\exists x_{k+1}\, \chi(\vec{x}, x_{k+1})\right)[\vec{b}']$

Zu "$\Rightarrow$": Wegen $\mathfrak{A} \models \left(\exists x_{k+1}\, \chi(\vec{x}, x_{k+1})\right)[\vec{a}']$

gibt es ein $a \in A$ mit $\mathfrak{A} \models \chi[\vec{a}', a]$.

Da Dupl. $G_{m+1}(\mathfrak{A}, \vec{a}', \mathfrak{B}, \vec{b}')$ gewinnt, muss es ein $b \in B$ geben, so dass Dupl. das Spiel $G_m(\mathfrak{A}, \vec{a}', a, \mathfrak{B}, \vec{b}', b)$ gewinnt.

Gemäß Induktionsannahme gilt dann:

$\mathfrak{A} \models \chi[\vec{a}', a] \iff \mathfrak{B} \models \chi[\vec{b}', b]$.

Somit gilt $\mathfrak{B} \models \chi[\vec{b}', b]$ und daher $\mathfrak{B} \models \left(\exists x_{k+1}\, \chi(\vec{x}, x_{k+1})\right)[\vec{b}']$

Zu "$\Leftarrow$": analog.

$\square_{(a) \Rightarrow (c)}$

$\square_{\text{Satz 3.21}}$

Bemerkung 3.22 (Gewinnstrategie für Spoiler)

Seien $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ σ-Strukturen.

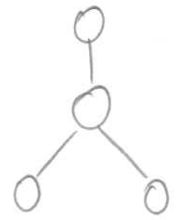
Sei φ ein $\mathrm{FO}[\sigma]$-Satz s.d. $\mathfrak{A} \models \varphi$ und $\mathfrak{B} \not\models \varphi$.

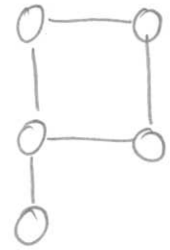
Sei $m := \mathrm{qr}(\varphi)$

Gemäß Satz 3.21 und Satz 3.8 hat dann Spoiler eine Gewinnstrategie im Spiel $\mathfrak{G}_m(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$.

Der Satz φ gibt sogar direkt eine Gewinnstrategie für Spoiler an: Er gewinnt, indem er Elemente in $\mathfrak{A}$ wählt, die den $\exists$-Quantoren in φ entsprechen, und Elemente in $\mathfrak{B}$, die den $\forall$-Quantoren in φ entsprechen.

Bsp: Seien $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ die Graphen

$\mathfrak{A}$: 

$\mathfrak{B}$: 

So ist $\varphi := \exists x \forall y (x=y \vee Exy)$

ein Satz mit $\mathfrak{A} \models \varphi$ und $\mathfrak{B} \not\models \varphi$, d.h. es gilt

$\mathfrak{A} \models \exists x \forall y (x=y \vee Exy)$, $\mathfrak{B} \models \forall x \exists y (\neg x=y \wedge \neg Exy)$.

Sp. wählt in Runde 1 ein $a_1 \in A$ s.d.

$$\mathfrak{A} \models \Big(\forall y \, (x=y \vee Exy) \Big) [a_1]$$

(ein solches Element gibt es, da $\mathfrak{A} \models \varphi$).

Wegen $\mathfrak{B} \not\models \varphi$ muss für <u>jede</u> Antwort $b_1 \in B$ von Dupl. gelten:

$$\mathfrak{B} \models \Big(\exists y \, (\neg x=y \wedge \neg Exy) \Big) [b_1]$$

In Runde 2 kann Sp. daher ein Element $b_2 \in B$ auswählen, für das gilt:

$$\mathfrak{B} \models \big(\neg x=y \wedge \neg Exy \big) [b_1, b_2].$$

Für jede mögliche Antwort $a_2 \in A$, die Dupl. geben kann, gilt $\mathfrak{A} \models \big(x=y \vee Exy \big) [a_1, a_2]$.

Daher kann die Abbildung π mit $\pi(a_1) = b_1$ und $\pi(a_2) = b_2$ kein partieller Isomorphismus sein. Dupl. hat die Partie also verloren.

<u>Bemerkung 3.23</u>: ("$\equiv_m$ hat nur endlich viele Äquivalenzklassen")

Aus Satz 3.21 und Bemerkung 3.20 (b) folgt, dass für jedes $m \in \mathbb{N}$ und jede Funktionen-freie Signatur σ die Relation $\equiv_m$ nur <u>endlich</u> viele Äquivalentklassen auf der Klasse aller σ-Strukturen hat.

Die Äquivalenzklasse, zu der eine Struktur $\mathfrak{A}$ gehört, wird durch den $FO[\sigma]$-Satz $\varphi^m_{\mathfrak{A}}$ definiert.

Die Klasse aller σ-Strukturen ist also eine Vereinigung von <u>endlich</u> vielen Äquivalenzklassen von $\equiv_m$.

Für jeden $FO[\sigma]$-Satz φ ist

$$\{ \mathfrak{A} : \mathfrak{A} \text{ ist eine } \sigma\text{-Struktur mit } \mathfrak{A} \models \varphi \}$$

eine Vereinigung von Äquivalenzklassen von $\equiv_m$.

Insbes. folgt daraus, dass es für jedes $m \in \mathbb{N}$ nur <u>endlich</u> viele nicht-äquivalente $FO[\sigma]$-Formeln der Quantorentiefe $\leq m$ gibt.

Aus Satz 3.21 können wir folgende Verschärfung von Korollar 3.17 folgern:

<u>Korollar 3.24</u>

Ist S eine Klasse von Strukturen, σ eine funktionen-freie Signatur und $C \subseteq S$ eine Klasse von σ-Strukturen, so sind folgende Aussagen äquivalent:

(a) C ist nicht FO-definierbar in S

(b) Für jedes $m \in \mathbb{N}$ gibt es σ-Strukturen $\mathfrak{A}_m \in C$, $\mathfrak{B}_m \in S \setminus C$, so dass $\mathfrak{A}_m \approx_m \mathfrak{B}_m$.

Beweis:

(b) $\Rightarrow$ (a): wurde in Korollar 3.17 bewiesen.

(a) $\Rightarrow$ (b): Angenommen, (b) gilt nicht.

Dann gibt es ein $m \in \mathbb{N}$ so dass für alle σ-Strukturen $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \in S$ gilt:

(*) Falls $\mathfrak{A} \in C$ und $\mathfrak{A} \approx_m \mathfrak{B}$, so $\mathfrak{B} \in C$.

Gemäß dem Satz von Ehrenfeucht gilt

$$\mathfrak{A} \approx_m \mathfrak{B} \iff \mathfrak{A} \equiv_m \mathfrak{B}.$$

Die Aussage (*) besagt also, dass C eine Vereinigung von Äquivalenzklassen von $\equiv_m$ ist und durch den FO[σ]-Satz

$$\psi := \bigvee \{ \varphi^m_{\mathfrak{A}} : \mathfrak{A} \text{ ist eine } \sigma\text{-Struktur mit } \mathfrak{A} \in C \}$$

definiert wird.

D.h. f.a. σ-Strukturen $\mathfrak{C} \in S$ gilt:

$$\mathfrak{C} \in C \iff \mathfrak{C} \models \psi.$$

Somit ist C FO-definierbar in S. ↯ $\square$