jedem Knoten sowohl einen Nachbarn als auch einen Nicht-Nachbarn.

(c) Spoiler gewinnt das 3-Runden EF-Spiel auf den Graphen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ aus (b), indem er in den ersten 3 Runden 3 verschiedene nicht benachbarte Knoten in $\mathfrak{A}$ wählt.

Notation 3.4:

Wir schreiben $\mathcal{G}_m(\mathfrak{A}, \vec{a}', \mathfrak{B}, \vec{b}')$, um das m-Runden EF-Spiel auf $(\mathfrak{A}, \vec{a}')$ und $(\mathfrak{B}, \vec{b}')$ zu bezeichnen.
Ist $k=0$ (d.h. $\vec{a}'$ und $\vec{b}'$ sind leer), so schreiben wir auch kurz $\mathcal{G}_m(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ an Stelle von $\mathcal{G}_m(\mathfrak{A}, \vec{a}', \mathfrak{B}, \vec{b}')$.

Bemerkung 3.5

Die Gewinnbedingung im EF-Spiel ist so gewählt, dass die Ziele von Spoiler und Duplicator anschaulich folgendermaßen beschrieben werden können:
Spoilers Ziel ist es, zu zeigen, dass die beiden

Strukturen $(\mathfrak{A}, \vec{a}')$ und $(\mathfrak{B}, \vec{b}')$ verschieden sind. Duplicators Ziel ist es, einen etwaigen Unterschied zwischen den beiden Strukturen zu vertuschen.

Eine Strategie für einen der beiden Spieler ist eine Vorschrift, die ihm sagt, welchen Zug er als nächstes machen soll. Formal:

Definition 3.6 (Strategie bzw Gewinnstrategie)

(a) Eine Strategie für Spoiler ist eine Abbildung

$$f_S : \bigcup_{i=0}^{m-1} (A^i \times B^i) \longrightarrow A \dot{\cup} B.$$

Sind $\vec{a} := a_1, \dots, a_i$ und $\vec{b} := b_1, \dots, b_i$ die in den ersten i Runden gewählten Elemente in $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$, so gibt $f_S(\vec{a}, \vec{b})$ an, welches Element Spoiler in der $(i+1)$-ten Runde wählen soll

(b) Eine <u>Strategie für Duplicator</u> ist eine Abbildung

$$f_D : \bigcup_{i=0}^{m-1} \Big((A^i \times B^i) \times (A \dot\cup B) \Big) \longrightarrow A \dot\cup B ,$$

so dass für alle $\vec{a} \in A^i$, $\vec{b} \in B^i$, $c \in A \dot\cup B$ gilt:

$$f_D(\vec{a}, \vec{b}, c) \in B \iff c \in A$$

Sind $\vec{a} := a_1, \dots, a_i$ und $\vec{b} := b_1, \dots, b_i$ die in den ersten i Runden gewählten Elemente und ist c das von Spoiler in Runde $i+1$ gewählte Element, so gibt $f_D(\vec{a}, \vec{b}, c)$ an, mit welchem Element Duplicator in der $(i+1)$-ten Runde antworten soll.

(c) Eine <u>Gewinnstrategie</u> ist eine Strategie für einen der beiden Spieler, mit der er alle Partien des Spiels $G_m(\mathfrak{A}, \vec{a}', \mathfrak{B}, \vec{b}')$ gewinnt.

<u>Notation 3.7</u>

Wir sagen: Spoiler (bzw Duplicator) <u>gewinnt</u> $G_m(\mathfrak{A}, \vec{a}', \mathfrak{B}, \vec{b}')$, falls er (bzw sie) eine Gewinnstrategie im m-Runden EF-Spiel auf $(\mathfrak{A}, \vec{a}')$ und $(\mathfrak{B}, \vec{b}')$ hat.

Satz 3.8

Für alle Funktionen-freien Signaturen σ, alle σ-Strukturen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, alle $k \in \mathbb{N}$, alle $\vec{a}' := a_1', \dots, a_k' \in A$, $\vec{b}' := b_1', \dots, b_k' \in B$ und alle $m \in \mathbb{N}$ gilt:

Genau einer der beiden Spieler (Spoiler bzw. Duplicator) hat eine Gewinnstrategie im Spiel $\mathfrak{G}_m(\mathfrak{A}, \vec{a}', \mathfrak{B}, \vec{b}')$.

Beweis: Übung (per Induktion nach m) $\square$

Definition 3.9
Wir schreiben $\mathfrak{A} \approx_m \mathfrak{B}$, um auszudrücken, dass Duplicator eine Gewinnstrategie im m-Runden EF-Spiel auf $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ hat.

Beispiel 3.10
Sei $\sigma_{ord} := \{\leq, min, max\}$ die Signatur, die aus einem 2-stelligen Relationssymbol $\leq$ und zwei Konstantensymbolen min und max besteht.

Wir betrachten die beiden folgenden σ_{ord}-Strukturen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$:

$\mathfrak{A} := (\{0, 1, \dots, 7\}, \leq^{\mathfrak{A}}, 0, 7)$ und

$\mathfrak{B} := (\{0, 1, \dots, 7, 8\}, \leq^{\mathfrak{B}}, 0, 8)$, wobei $\leq^{\mathfrak{A}}$ und $\leq^{\mathfrak{B}}$ die natürlichen linearen Ordnungen auf A und B sind

Man sieht leicht, dass folgendes gilt:

$\mathfrak{A} \approx_2 \mathfrak{B}$ (d.h. Duplicator hat eine Gewinnstrategie im Spiel $\mathfrak{G}_2(\mathfrak{A},\mathfrak{B})$),

und $\mathfrak{A} \not\approx_3 \mathfrak{B}$ (d.h. Spoiler hat eine Gewinnstrategie in Spiel $\mathfrak{G}_3(\mathfrak{A},\mathfrak{B})$).

Dies lässt sich verallgemeinern zu folgender Aussage:

<u>Satz 3.11</u>

Sei $\sigma_{Ord} := \{\leq, min, max\}$ die Signatur aus Bsp. 3.10.
Für jedes $m \geq 1$ und für alle geordneten endlichen Strukturen $\mathfrak{A} = (A, \leq^{\mathfrak{A}}, min^{\mathfrak{A}}, max^{\mathfrak{A}})$ und $\mathfrak{B} = (B, \leq^{\mathfrak{B}}, min^{\mathfrak{B}}, max^{\mathfrak{B}})$ gilt:

$$\mathfrak{A} \approx_m \mathfrak{B} \iff |A| = |B| \text{ oder } |A|, |B| > 2^m$$

(<u>Notation</u>: Eine σ_{Ord}-Struktur $\mathcal{C} = (C, \leq^{\mathcal{C}}, min^{\mathcal{C}}, max^{\mathcal{C}})$ heißt <u>geordnet</u>, falls $\leq^{\mathcal{C}}$ eine lineare Ordnung auf C ist (d.h. $\leq^{\mathcal{C}}$ ist reflexiv, transitiv und antisymmetrisch) und $min^{\mathcal{C}}$ bzw. $max^{\mathcal{C}}$ ist das kleinste bzw. größte Element in C bzgl. $\leq^{\mathcal{C}}$.)

Beweis:

"$\Leftarrow$": Falls $|A| = |B|$, so gilt: $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$

(beachte: laut Voraussetzung sind A und B endlich).

Sei $\pi : \mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$. Duplicator gewinnt das Spiel $G_m(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$, indem sie in jeder Runde einfach Spoilers Zug "kopiert", d.h. sie wählt $\pi(a_i)$ (bzw. $\pi^{-1}(b_i)$), falls Spoiler in der i-ten Runde ein Element $a_i \in A$ (bzw. $b_i \in B$) wählt.

Im Folgenden betrachten wir den Fall, dass $|A| > 2^m$ und $|B| > 2^m$.

Für $\mathcal{C} := \mathfrak{A}$ oder $\mathcal{C} := \mathfrak{B}$ betrachte folgende auf $C \times C$ definierte Distanzfunktion

$$\mathrm{Dist}(c, c') := \left|\{ d \in C : c <^{\mathcal{C}} d \leq^{\mathcal{C}} c' \text{ oder } c' <^{\mathcal{C}} d \leq^{\mathcal{C}} c \}\right|.$$

Wir zeigen nun, dass Duplicator so spielen kann, dass für jedes $i \in \{0, \dots, m\}$ die folgende Invariante $(*)_i$ erfüllt ist:

$(*)_i$: Sind $a_1, \dots, a_i$ und $b_1, \dots, b_i$ die in den Runden $1, \dots, i$ gewählten Elemente in A und B, und ist $a_{min} := \min^{\mathfrak{A}}$, $a_{max} := \max^{\mathfrak{A}}$, $b_{min} := \min^{\mathfrak{B}}$, $b_{max} := \max^{\mathfrak{B}}$, so gilt für alle $j, j' \in \{1, \dots, i, min, max\}$:

(a) $a_j \leq^{\mathfrak{A}} a_{j'} \iff b_j \leq^{\mathfrak{B}} b_{j'}$ und

(b) $\mathrm{Dist}(a_j, a_{j'}) = \mathrm{Dist}(b_j, b_{j'})$ oder $\mathrm{Dist}(a_j, a_{j'}), \mathrm{Dist}(b_j, b_{j'}) \geq 2^{m-i}$

Der Beweis folgt per Induktion nach i.

$\underline{i=0}$: Die Bedingung $(*)_0$ ist erfüllt, da

$Dist(a_{min}, a_{max}) = |A|-1 \geq 2^m$ und

$Dist(b_{min}, b_{max}) = |B|-1 \geq 2^m$.

$\underline{i \to i+1}$: Gemäß Induktionsannahme sind bereits i Runden gespielt und die Bedingung $(*)_i$ ist nach der i-ten Runde erfüllt.

Fall 1: Spoiler wählt in der $(i+1)$-ten Runde ein Element a_{i+1} in A.

- Falls $a_{i+1} = a_j$ für ein $j \in \{1,..,i\} \cup \{min, max\}$, so antwortet Duplicator mit $b_{i+1} := b_j$ und bewirkt damit, dass die Bedingung $(*)_{i+1}$ gilt.

- Ansonsten gibt es Indices $j, j' \in \{1,..,i, min, max\}$, so dass
  - $a_j <^{\mathfrak{A}} a_{i+1} <^{\mathfrak{A}} a_{j'}$ und
  - f.a. $j'' \in \{1,..,i, min, max\}$ gilt $a_{j''} \leq^{\mathfrak{A}} a_j$ oder $a_{j'} \leq^{\mathfrak{A}} a_{j''}$.

Da $(*)_i$ gemäß Ind.annahme erfüllt ist, gilt:

(1.) $Dist(a_j, a_{j'}) = Dist(b_j, b_{j'})$ oder

(2.) $Dist(a_j, a_{j'}), Dist(b_j, b_{j'}) \geq 2^{m-i}$.

In Fall (1.) gibt es ein Element b_{i+1} in $\mathcal{B}$ so dass $b_j <^{\mathcal{B}} b_{i+1} <^{\mathcal{B}} b_{j'}$ und $Dist(b_j, b_{i+1}) = Dist(a_j, a_{i+1})$ und $Dist(b_{i+1}, b_{j'}) = Dist(a_{i+1}, a_{j'})$.
Offensichtlich ist die Bedingung $(*)_{i+1}$ erfüllt, wenn Dupl. in der $(i+1)$-ten Runde dieses b_{i+1} wählt.

In Fall (2.) muss es mindestens ein Element $c \in B$ geben, so dass $b_j <^{\mathcal{B}} c <^{\mathcal{B}} b_{j'}$ und
$Dist(b_j, c) \geq \frac{2^{m-i}}{2} = 2^{m-(i+1)}$ und $Dist(c, b_{j'}) \geq \frac{2^{m-i}}{2} = 2^{m-(i+1)}$.

- Falls $Dist(a_j, a_{i+1}) \geq 2^{m-(i+1)}$ und $Dist(a_{i+1}, a_{j'}) \geq 2^{m-(i+1)}$, so wählt Dupl. in der $(i+1)$-ten Runde $b_{i+1} := c$
- Falls $Dist(a_j, a_{i+1}) < 2^{m-(i+1)}$, so wählt Dupl. das $b_{i+1} >^{\mathcal{B}} b_j$ mit $Dist(b_j, b_{i+1}) = Dist(a_j, a_{i+1})$.
- Falls $Dist(a_{i+1}, a_{j'}) < 2^{m-(i+1)}$, so wählt Dupl. das $b_{i+1} <^{\mathcal{B}} b_{j'}$ mit $Dist(b_{i+1}, b_{j'}) = Dist(a_{i+1}, a_{j'})$.

Man kann leicht nachprüfen, dass in jedem der 3 Fälle die Bedingung $(*)_{i+1}$ erfüllt ist.

Fall 2: Spoiler wählt in der $(i+1)$-ten Runde ein Element b_{i+1} in B

Duplicators Antwort a_{i+1} in A wird analog zu Fall 1 ermittelt.

Damit sind wir fertig mit dem Induktionsschritt.
Wir haben also bewiesen, dass Dupl. so spielen kann, dass nach jeder Runde $i \in \{0,\dots,m\}$ die Bedingung $(*)_i$ erfüllt ist.
Insbes. ist nach m Runden die Bedingung $(*)_m$ erfüllt und Dupl. hat daher die Partie gewonnen.

"$\Longrightarrow$": Offensichtlich genügt es, folgendes zu zeigen:
Falls $|A| < |B|$ und $|A| \leq 2^m$, so hat Spoiler eine Gewinnstrategie im Spiel $\mathcal{G}_m(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$.
Dies kann man beweisen, indem man zeigt, dass Spoiler so spielen kann, dass für jedes $i \in \{0,1,\dots,m\}$ die folgende Invariante $(**)_i$ erfüllt ist:

$(**)_i$: Sind $a_1,\dots,a_i$ und $b_1,\dots,b_i$ die in den Runden $1,\dots,i$ gewählten Elemente in A und B, und ist $a_{min} := \min^{\mathfrak{A}}$, $a_{max} := \max^{\mathfrak{A}}$, $b_{min} := \min^{\mathfrak{B}}$, $b_{max} := \max^{\mathfrak{B}}$, so gibt es $j, j' \in \{1,\dots,i,\min,\max\}$,

so dass

(a) $(a_j <^{\mathfrak{A}} a_{j'}$ und $b_j \geq^{\mathfrak{B}} b_{j'})$ oder $(a_j \geq^{\mathfrak{A}} a_{j'}$ und $b_j <^{\mathfrak{B}} b_{j'})$

oder

(b) $Dist(a_j, a_{j'}) < 2^{m-i}$ und $Dist(a_j, a_{j'}) < Dist(b_j, b_{j'})$

Details: Übung.

$\square$

3.2 Der Satz von Ehrenfeucht

In diesem Abschnitt wird gezeigt, dass ein enger Zusammenhang zwischen EF-Spielen und der Ausdrucksstärke der Logik erster Stufe besteht.

Insbesondere werden wir sehen, dass man EF-Spiele nutzen kann, um zu zeigen, dass bestimmte Aussagen nicht durch Formeln der Logik erster Stufe ausgedrückt werden können.

Um den Zusammenhang zwischen FO und EF-Spielen beschreiben zu können, benötigen wir folgenden Begriff:

Definition 3.12 (Quantorentiefe bzw. Quantorenrang)

Der Quantorenrang (bzw. Quantorentiefe) $qr(\varphi)$ einer $FO[\sigma]$-Formel φ ist die maximale Anzahl von ineinander geschachtelten Quantoren, die in φ vorkommen. Per Induktion über den Formelaufbau ist $qr(\varphi)$ also wie folgt definiert:

- $qr(\varphi) = 0$ falls φ eine atomare Formel ist
- $qr(\varphi) = qr(\psi)$, falls φ von der Form $\neg\psi$ ist
- $qr(\varphi) = \max\{qr(\psi_1), qr(\psi_2)\}$, falls φ von der Form $(\psi_1 * \psi_2)$ ist (mit $* \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$)
- $qr(\varphi) = qr(\psi)+1$, falls φ von der Form $Qx\psi$ ist mit $Q \in \{\exists, \forall\}$.

Beispiele 3.13

- $qr\Big(\exists x \, \forall y \, (x=y \lor Rxyz) \Big) = 2$
- $qr\Big(\exists x \big(Px \lor \forall y \, Rxyz \big) \Big) = 2$
- $qr\Big(\big(\exists x \, Px \lor \forall y \, (Ryyz \to y=z) \big) \Big) = 1$

Definition 3.14

Seien $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ σ-Strukturen und sei $m \in \mathbb{N}$.
$\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ heißen m-äquivalent (kurz: $\mathfrak{A} \equiv_m \mathfrak{B}$), falls sie die gleichen $FO[\sigma]$-Sätze der Quantorentiefe $\leq m$ erfüllen, d.h. falls folgendes gilt:
f.a. $FO[\sigma]$-Sätze φ mit $qr(\varphi) \leq m$ ist

$$\mathfrak{A} \models \varphi \iff \mathfrak{B} \models \varphi .$$

Satz 3.15 (Der Satz von Ehrenfeucht, 1961)

Sei σ eine Funktionen-freie Signatur und seien $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ zwei σ-Strukturen. Dann gilt f.a. $m \in \mathbb{N}$:

$$\mathfrak{A} \equiv_m \mathfrak{B} \iff \mathfrak{A} \approx_m \mathfrak{B}$$

d.h. $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ erfüllen dieselben $FO[\sigma]$-Sätze der Quantorentiefe $\leq m$

d.h. Duplicator hat eine Gewinnstrategie im m-Runden EF-Spiel auf $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$.

Bevor wir den Satz von Ehrenfeucht beweisen, wollen wir uns zunächst anschauen, wie man den Satz benutzen kann, um zu zeigen, dass bestimmte Aussagen nicht in der Logik erster Stufe formalisiert werden können:

Definition 3.16

Sei S eine Klasse von Strukturen, sei σ eine Funktionen-freie Signatur und sei $C \subseteq S$ eine Klasse von σ-Strukturen.

C heißt FO-definierbar in S, falls es einen $FO[\sigma]$-Satz φ gibt, so dass f.a. σ-Strukturen $\mathfrak{A} \in S$ gilt: $\mathfrak{A} \models \varphi \iff \mathfrak{A} \in C$.

Als einfache Folgerung aus dem Satz von Ehrenfeucht erhält man folgendes:

Korollar 3.17

Sei S eine Klasse von Strukturen, sei σ eine Funktionen-freie Signatur und sei $C \subseteq S$ eine Klasse von σ-Strukturen.

Falls es für jedes $m \in \mathbb{N}$ σ-Strukturen $\mathfrak{A}_m \in C$ und $\mathfrak{B}_m \in S \setminus C$ gibt, so dass $\mathfrak{A}_m \approx_m \mathfrak{B}_m$ (d.h. Dupl. hat eine Gewinnstrategie im m-Runden EF-Spiel auf $\mathfrak{A}_m, \mathfrak{B}_m$), so ist C nicht FO-definierbar in S.

Beweis: Durch Widerspruch.

Angenommen, C ist doch FO-definierbar in S.
Dann gibt es einen FO$[\sigma]$-Satz φ s.d. f.a. σ-Strukturen $\mathcal{C} \in S$ gilt: $\mathcal{C} \in C \iff \mathcal{C} \models \varphi$.

Sei $m := qr(\varphi)$.
Laut Voraussetzung gibt es σ-Strukturen $\mathfrak{A}_m \in C$ und $\mathfrak{B}_m \in S \setminus C$, so dass $\mathfrak{A}_m \approx_m \mathfrak{B}_m$.
Gemäß des Satzes von Ehrenfeucht gilt dann:
$\mathfrak{A}_m \equiv_m \mathfrak{B}_m$, d.h. $\mathfrak{A}_m$ und $\mathfrak{B}_m$ erfüllen die gleichen FO$[\sigma]$-Sätze der Quantorentiefe $\leq m$.
Insbes. gilt also: $\mathfrak{A}_m \models \varphi \iff \mathfrak{B}_m \models \varphi$.

Daher: $\mathfrak{A}_m \in C \iff \mathfrak{B}_m \in C$

$\lightning$ Wid. zu $\mathfrak{A}_m \in C$ und $\mathfrak{B}_m \in S \setminus C$.

$\square$

Als einfache Anwendung von Korollar 3.17 und Satz 3.11 erhalten wir:

Satz 3.18.
Sei $\mathrm{Ord}_\leq$ die Klasse aller endlichen linearen Ordnungen $\mathfrak{A} = (A, \leq^{\mathfrak{A}})$, und sei $\mathrm{Even}_\leq$ die Klasse aller endlichen linearen Ordnungen gerader Kardinalität, d.h. aller endl. linearen Ordnungen $\mathfrak{A} = (A, \leq^{\mathfrak{A}})$, bei denen $|A|$ durch 2 teilbar ist.

Dann gilt:

Even$_{\leq}$ ist <u>nicht</u> FO-definierbar in Ord$_{\leq}$.

<u>Beweis:</u>

Nütze Korollar 3.17 (mit $S := \text{Ord}_{\leq}$ und $C := \text{Even}_{\leq}$).

Für jedes $m \in \mathbb{N}$ sei $\mathfrak{A}_m := (A, \leq^{\mathfrak{A}_m})$ eine lineare Ordnung mit $|A| = 2^m + 2$ und sei $\mathfrak{B}_m := (B, \leq^{\mathfrak{B}})$ eine lineare Ordnung mit $|B| = 2^m + 1$.

Somit ist $\mathfrak{A}_m \in \text{Even}_{\leq}$ und $\mathfrak{B}_m \in \text{Ord}_{\leq} \setminus \text{Even}_{\leq}$.

Aus Satz 3.11 folgt, dass $\mathfrak{A}_m \approx_m \mathfrak{B}_m$.

Korollar 3.17 liefert daher, dass Even$_{\leq}$ <u>nicht</u> FO-definierbar ist in Ord$_{\leq}$ $\square$

<u>Beweis des Satzes von Ehrenfeucht</u>

Wir nutzen folgende Notation:

<u>Definition 3.19</u>

σ sei eine Funktionen-freie Signatur, $\mathfrak{A}$ eine σ-Struktur, $k \in \mathbb{N}$, $\vec{a} = a_1, \ldots, a_k$ eine Folge von Elementen aus A und $\vec{x} = x_1, \ldots, x_k$ eine Folge von k verschiedenen Elementen aus Var.

Wir definieren induktiv für jedes $m \in \mathbb{N}$ eine