Beweis von Satz 2.12

Wir zeigen zunächst zwei Dinge:

Behauptung 1:

Sei $\psi := Q_1 x_1 \cdots Q_n x_n \chi$, wobei $n \geq 0$,

$Q_1, \dots, Q_n \in \{\exists, \forall\}$ und $\chi \in \mathrm{FO}[\sigma]$.

Für jedes $Q \in \{\exists, \forall\}$ sei

$$\tilde{Q} := \begin{cases} \forall, & \text{falls } Q = \exists \\ \exists, & \text{falls } Q = \forall \end{cases}.$$

Dann gilt:

$$\neg\psi \equiv \tilde{Q}_1 x_1 \cdots \tilde{Q}_n x_n \neg\chi$$

Beweis von Beh. 1:

Einfaches Nachrechnen per Induktion über n unter Verwendung der Tatsache, dass

$$\neg\exists x\, \vartheta \equiv \forall x \neg\vartheta \quad \text{und} \quad \neg\forall x\, \vartheta \equiv \exists x \neg\vartheta.$$

Details: Übung.

$\square_{\text{Beh 1}}$

<u>Behauptung 2</u>:

Seien $\psi_1 := Q_1 x_1 \cdots Q_\ell x_\ell \, \chi_1$ und

$\psi_2 := Q'_1 y_1 \cdots Q'_m y_m \, \chi_2$, wobei

$\ell, m \geq 0$, $Q_1, \ldots, Q_\ell, Q'_1, \ldots, Q'_m \in \{\exists, \forall\}$,

$x_1, \ldots, x_\ell, y_1, \ldots, y_m \in \mathrm{Var}$, $\chi_1, \chi_2 \in \mathrm{FO}[\sigma]$.

Es gelte $\{x_1, \ldots, x_\ell\} \cap \mathrm{frei}(\psi_2) = \emptyset$ und

$\{y_1, \ldots, y_m\} \cap \mathrm{frei}(\chi_1) = \emptyset$.

Dann gilt für $* \in \{\wedge, \vee\}$, dass

$$(\psi_1 * \psi_2) \equiv Q_1 x_1 \cdots Q_\ell x_\ell \, Q'_1 y_1 \cdots Q'_1 y_m \, (\chi_1 * \chi_2).$$

<u>Beweis von Beh 2</u>:

zwei Induktionen über ℓ bzw m unter Verwendung der Tatsache, dass folgendes gilt:

Ist $x \notin \mathrm{frei}(\vartheta_1)$, so gilt

1) $(\vartheta_1 \vee \exists x \, \vartheta_2) \equiv \exists x \, (\vartheta_1 \vee \vartheta_2)$

2) $(\vartheta_1 \wedge \exists x \, \vartheta_2) \equiv \exists x \, (\vartheta_1 \wedge \vartheta_2)$

3) $(\vartheta_1 \vee \forall x \, \vartheta_2) \equiv \forall x \, (\vartheta_1 \vee \vartheta_2)$

4) $(\vartheta_1 \wedge \forall x \, \vartheta_2) \equiv \forall x \, (\vartheta_1 \wedge \vartheta_2)$.

<u>Details</u>: Übung.

$\square$ Beh 2

Abschluss des Beweises von Satz 2.12:

Sei φ eine $FO[\sigma]$-Formel.
Gemäß Beobachtung 2.2 können wir annehmen, dass in φ keins der Symbole $\rightarrow, \leftrightarrow$ vorkommt.
Per Induktion über den Aufbau von φ zeigen wir, dass es eine zu φ äquivalente Formel φ' in Pränex-Normalform gibt mit $frei(\varphi') = frei(\varphi)$.

Induktionsanfang:

Atomare Formeln sind quantorenfrei und daher insbes. in Pränex-Normalform.

Induktionsschritt:

Fall 1: φ ist von der Form $Qx\psi$, mit $Q \in \{\exists, \forall\}$, $x \in Var$, $\psi \in FO[\sigma]$.
Gemäß Induktionsannahme gibt es eine zu ψ äquivalente Formel ψ' in Pränex-Normalform mit $frei(\psi') = frei(\psi)$.
Offensichtlich ist $\varphi' := Qx\psi'$ die gesuchte Formel in Pränex-Normalform.

Fall 2: φ ist von der Form $\neg\psi$ mit $\psi \in FO[\sigma]$.

Gemäß Induktionsannahme gibt es Formel ψ' in Pränex-Normalform mit $\psi' \equiv \psi$ und $frei(\psi') = frei(\psi)$.

Klar: $\varphi \equiv \neg\psi'$.

Gemäß Behauptung 1 gibt es eine zu $\neg\psi'$ äquivalente Formel in Pränex-Normalform.

Fall 3: φ ist von der Form $(\psi_1 * \psi_2)$ mit $* \in \{\wedge, \vee\}$ und $\psi_1, \psi_2 \in \mathrm{FO}[\sigma]$.

Gemäß Induktionsannahme gibt es Formeln ψ_1', ψ_2' in Pränex-Normalform mit $\psi_1' \equiv \psi_1$, $\psi_2' \equiv \psi_2$ und $\mathrm{frei}(\psi_1') = \mathrm{frei}(\psi_1)$ und $\mathrm{frei}(\psi_2') = \mathrm{frei}(\psi_2)$. Klar: $\varphi \equiv (\psi_1' * \psi_2')$

Sei $Q_1 x_1 \cdots Q_\ell x_\ell\, \chi_1$ die Form von ψ_1' (mit χ_1 quantorenfrei) und sei

$Q_1' y_1 \cdots Q_m' y_m\, \chi_2$ die Form von ψ_2' (mit χ_2 quantorenfrei).

Durch konsistentes Umbenennen der in ψ_1', ψ_2' gebundenen Variablen $x_1, \ldots, x_\ell, y_1, \ldots, y_m$ können wir O.B.d.A. annehmen, dass $\{x_1, \ldots, x_\ell\} \cap \mathrm{frei}(\psi_2') = \emptyset$ und $\{y_1, \ldots, y_m\} \cap \mathrm{frei}(\chi_1) = \emptyset$.

Gemäß Behauptung 2 gibt es eine zu $(\psi_1' * \psi_2')$ äquivalente Formel in Pränex-Normalform.

$\square$ Satz 2.12

2.4 Termreduzierte Formeln und relationale Signaturen

Beispiel 2.14

Terme, die in einer FO[σ]-Formel vorkommen, können "ineinandergeschachtelte" Funktionssymbole enthalten.

Bsp: $\sigma = \{ \underset{2}{f}, \underset{1}{g} \}$,

$$\varphi := \forall x \exists y \; fxgy = x$$

φ enthält hier den "geschachtelten" Term $fxgy$.

Man sieht leicht, dass φ äquivalent ist zur Formel

$$\hat{\varphi} := \forall x \exists y \exists z \left(gy = z \wedge fxz = x \right),$$

in der keine "geschachtelten" Terme vorkommen.

Definition 2.15:

Eine FO[σ]-Formel heißt termreduziert, wenn all ihre atomaren Teilformeln von der Form

- $Rx_1 \cdots x_r$, mit $R \in \sigma$, $r = ar(R)$, $x_1, \ldots, x_r \in Var$,
- $fx_1 \cdots x_k = y$, mit $f \in \sigma$, $k = ar(f)$, $x_1, \ldots, x_k, y \in Var$ oder
- $x = c$, mit $x \in Var$, $c \in \sigma$
- $x = y$, mit $x, y \in Var$

sind.

Satz 2.16

Jede $FO[\sigma]$-Formel φ ist äquivalent zu einer termreduzierten $FO[\sigma]$-Formel φ' mit $\text{frei}(\varphi') = \text{frei}(\varphi)$.

Beweis: Per Induktion über den Aufbau von Formeln ordnen wir jeder $FO[\sigma]$-Formel φ eine äquivalente termreduzierte Formel φ' zu.

Für gegebenes $\varphi \in FO[\sigma]$ sei $x_1, x_2, x_3, \dots$ die Auflistung aller nicht in φ vorkommenden Variablen aus Var (in der durch $v_0, v_1, v_2, \dots$ induzierten Reihenfolge).

Fall 1: φ ist von der Form $t = x$, mit $x \in \text{Var}$, $t \in T_\sigma$.

φ' wird induktiv über den Aufbau von t wie folgt definiert:

- Ist t von der Form y, mit $y \in \text{Var}$, so

  $\varphi' := \varphi$ (φ ist von der Form $y = x$)

- Ist t von der Form c, mit $c \in \sigma$, so

  $\varphi' := x = c$ (φ ist von der Form $c = x$)

- Ist t von der Form $f t_1 \cdots t_k$ mit $f \in \sigma$, $k = ar(f)$, $t_1, \dots, t_k \in T_\sigma$, so

  $$\varphi' := \exists x_1 \cdots \exists x_k \left(f x_1 \cdots x_k = x \wedge [t_1 = x_1]' \wedge \cdots \wedge [t_k = x_k]' \right)$$

  (φ ist von der Form $f t_1 \cdots t_k = x$)

Fall 2: φ ist von der Form $t_1 = t_2$, wobei $t_1, t_2 \in T_\sigma$ und t_2 keine Variable. Dann setze

$$\varphi' := \exists x_1 \left([t_1 = x_1]' \wedge [t_2 = x_1]' \right)$$

Fall 3: φ ist von der Form $Rt_1 \cdots t_r$ mit $R \in \sigma$, $r = ar(R)$, $t_1, \ldots, t_r \in T_\sigma$. Dann setze

$$\varphi' := \exists x_1 \cdots \exists x_r \left(Rx_1 \cdots x_r \wedge [t_1 = x_1]' \wedge \cdots \wedge [t_r = x_r]' \right)$$

Fall 4: φ ist von der Form $\neg\psi$ mit $\psi \in FO[\sigma]$.

Dann setze $\varphi' := \neg\psi'$.

Fall 5: φ ist von der Form $(\psi_1 * \psi_2)$ mit $\psi_1, \psi_2 \in FO[\sigma]$ und $* \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$. Dann setze

$$\varphi' := (\psi_1' * \psi_2')$$

Fall 6: φ ist von der Form $Qx\psi$ mit $Q \in \{\exists, \forall\}$, $x \in Var$, $\psi \in FO[\sigma]$. Dann setze

$$\varphi' := Qx\psi'.$$

Man sieht leicht, dass in jedem der oben angegebenen Fälle gilt: $\varphi' \equiv \varphi$, φ' ist termreduziert und $frei(\varphi') = frei(\varphi)$.

$\square$

Definition 2.17

Eine Signatur heißt <u>relational</u>, wenn sie kein(e) Funktionssymbol(e) und kein(e) Konstantensymbol(e) enthält.

Manchmal (z.B. in Kapitel 3) ist es vorteilhaft, sich auf <u>relationale</u> Signaturen zu beschränken. Im Folgenden zeigen wir, dass dies keine wirkliche Einschränkung ist, da man Funktionen und Konstanten durch geeignete Relationen repräsentieren kann.

Definition 2.18

(a) Jeder Signatur σ ordnen wir eine <u>relationale</u> Signatur σ_{rel} wie folgt zu:

$$\begin{aligned}\sigma_{rel} := &\{ R : R \in \sigma \text{ ist ein Relationssymbol} \} \\ &\dot\cup \{ R_f : f \in \sigma \text{ ist ein Funktionssymbol} \} \\ &\dot\cup \{ R_c : c \in \sigma \text{ ist ein Konstantensymbol} \}\end{aligned}$$

Für jedes $c \in \sigma$ ist dabei R_c ein 1-stelliges Relationssymbol; für jedes $f \in \sigma$ mit $k := ar(f)$ ist R_f ein

Relationssymbol der Stelligkeit $k+1$.

(b) Jeder σ-Struktur $\mathfrak{A}$ ordnen wir eine σ_{rel}-Struktur $\mathfrak{A}_{rel}$ wie folgt zu:

- $\mathfrak{A}_{rel}$ hat dasselbe Universum wie $\mathfrak{A}$, d.h. $A_{rel} = A$
- $\mathfrak{A}_{rel}$ stimmt mit $\mathfrak{A}$ auf den Relationssymbolen aus σ überein, d.h. für jedes Relationssymbol $R \in \sigma$ gilt $R^{\mathfrak{A}_{rel}} := R^{\mathfrak{A}}$
- für jedes Funktionssymbol $f \in \sigma$ mit $k := ar(f)$ ist $R_f^{\mathfrak{A}_{rel}}$ der Graph der Funktion $f^{\mathfrak{A}}$, d.h.
$$R_f^{\mathfrak{A}_{rel}} := \left\{ (a_1, \dots, a_k, b) \in A_{rel}^{k+1} \ : \ f^{\mathfrak{A}}(a_1, \dots, a_k) = b \right\}$$
- für jedes Konstantensymbol $c \in \sigma$ ist $R_c^{\mathfrak{A}_{rel}}$ die 1-stellige Relation, die nur das Element $c^{\mathfrak{A}}$ enthält, d.h. $R_c^{\mathfrak{A}_{rel}} := \{ c^{\mathfrak{A}} \}$.

Der folgende Satz besagt anschaulich, dass $FO[\sigma]$-Formeln genau dieselben Aussagen über σ-Interpretationen machen können, wie $FO[\sigma_{rel}]$-Formeln über die entsprechenden σ_{rel}-Interpretationen.

Satz 2.19

(a) Zu jeder $FO[\sigma]$-Formel φ gibt es eine $FO[\sigma_{rel}]$-Formel $\hat{\varphi}$, so dass für alle zu φ passenden σ-Interpretationen $(\mathfrak{A}, \beta)$ gilt:

$$(\mathfrak{A}, \beta) \models \varphi \iff (\mathfrak{A}_{rel}, \beta) \models \hat{\varphi}$$

(b) Zu jeder $FO[\sigma_{rel}]$-Formel φ gibt es eine $FO[\sigma]$-Formel $\hat{\varphi}$, so dass für alle zu $\hat{\varphi}$ passenden σ-Interpretationen $(\mathfrak{A}, \beta)$ gilt:

$$(\mathfrak{A}_{rel}, \beta) \models \varphi \iff (\mathfrak{A}, \beta) \models \hat{\varphi}.$$

Beweis:

(a) Gemäß Satz 2.16 genügt es, $\hat{\varphi}$ für termreduzierte $FO[\sigma]$-Formeln φ anzugeben.
Wir tun dies induktiv über den Aufbau von termreduzierten $FO[\sigma]$-Formeln φ:

Fall 1: φ ist von der Form $Ry_1 \cdots y_r$ mit $R \in \sigma$, $r = ar(R)$, $y_1, \dots, y_r \in Var$.

Dann $\hat{\varphi} := \varphi$.

<u>Fall 2</u>: φ ist von der Form $f x_1 \cdots x_k = y$ mit $f \in \sigma$, $k = ar(f)$, $x_1, \ldots, x_k, y \in Var$.

Dann $\hat{\varphi} := R_f x_1 \cdots x_k y$.

<u>Fall 3</u>: φ ist von der Form $x = c$ mit $x \in Var$, $c \in \sigma$.

Dann $\hat{\varphi} := R_c x$

<u>Fall 4</u>: φ ist von der Form $x = y$ mit $x, y \in Var$.

Dann $\hat{\varphi} := \varphi$.

<u>Fall 5</u>: φ ist von der Form $\neg\psi$ mit $\psi \in FO[\sigma]$, ψ termreduziert. Dann $\hat{\varphi} := \neg\hat{\psi}$.

<u>Fall 6</u>: φ ist von der Form $(\psi_1 * \psi_2)$ mit $\psi_1, \psi_2 \in FO[\sigma]$, ψ_1, ψ_2 termreduziert, $* \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$. Dann

$$\hat{\varphi} := (\hat{\psi}_1 * \hat{\psi}_2)$$

<u>Fall 7</u>: φ ist von der Form $Qx\psi$ mit $Q \in \{\exists, \forall\}$, $x \in Var$, $\psi \in FO[\sigma]$, ψ termreduziert. Dann

$$\hat{\varphi} := Qx\hat{\psi}$$

Man sieht leicht, dass in jedem der oben angegebenen Fälle für jede zu φ passende σ-Interpretation $(\mathfrak{A}, \beta)$ gilt:

$$(\mathfrak{A}, \beta) \models \varphi \iff (\mathfrak{A}_{rel}, \beta) \models \hat{\varphi}$$

<u>(b)</u>: Zum Beweis von <u>(b)</u> können wir ähnlich wie in (a) verfahren, wobei wir an Stelle von Fall 2 und Fall 3 folgendermaßen vorgehen:

<u>Fall 2'</u>: φ ist von der Form $R_f t_1 \dots t_k t_{k+1}$ mit $k+1 = ar(R_f)$, $t_1, \dots, t_{k+1} \in T_{\sigma_{rel}}$. Dann

$$\hat{\varphi} := f t_1 \dots t_k = t_{k+1}$$

<u>Fall 3'</u>: φ ist von der Form $R_c t$ mit $t \in T_{\sigma_{rel}}$.

Dann $\hat{\varphi} := t = c$.

Rest: Übung. $\square$

Kapitel 3: Ehrenfeucht-Fraïssé-Spiele

Vereinbarung 3.1:

In diesem Kapitel werden ausschließlich Signaturen betrachtet, die kein(e) Funktionssymbol(e) enthalten. Solche Signaturen nennen wir funktionenfrei.

3.1 Das m-Runden EF-Spiel

Sei σ eine funktionenfreie Signatur.

$\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ seien zwei σ-Strukturen.

Für $k \in \mathbb{N}$ seien $\vec{a}' := a'_1, \dots, a'_k \in A$ bzw. $\vec{b}' := b'_1, \dots, b'_k \in B$ Folgen von Elementen aus A bzw. B.

Sei $m \in \mathbb{N}$.

Das m-Runden Ehrenfeucht-Fraïssé Spiel (kurz: EF-Spiel) auf $(\mathfrak{A}, \vec{a}')$ und $(\mathfrak{B}, \vec{b}')$ wird gemäß folgender Spielregeln gespielt:

Es gibt 2 Spieler, genannt Spoiler (kurz: S bzw. Sp.) und Duplicator (kurz: D bzw. Dupl.).

Das "Spielbrett" besteht aus den beiden Strukturen $(\mathfrak{A}, \vec{a}')$ und $(\mathfrak{B}, \vec{b}')$.

Eine <u>Partie</u> des Spiels besteht aus m Runden.

In jeder Runde $i \in \{1, \dots, m\}$ geschieht folgendes:

Zunächst wählt Spoiler entweder ein Element aus A, das im Folgenden mit a_i bezeichnet wird, oder er wählt ein Element aus B, das im Folgenden mit b_i bezeichnet wird

Danach antwortet Duplicator mit einem Element aus dem Universum der anderen Struktur, d.h. sie wählt ein $b_i \in B$, falls Spoiler ein $a_i \in A$ gewählt hat, bzw. ein Element $a_i \in A$, falls Spoiler ein $b_i \in B$ gewählt hat.

Nach der m-ten Runde ist die Partie beendet und der Gewinner wird wie folgt ermittelt:

Duplicator hat gewonnen, falls die Abbildung

$$\pi : \left\{ \begin{array}{ll} a_i \longmapsto b_i & \text{für alle } i \in \{1, \dots, m\} \\ c^{\mathfrak{A}} \longmapsto c^{\mathfrak{B}} & \text{für alle Konstantensymbole } c \in \sigma \\ a_j' \longmapsto b_j' & \text{für alle } j \in \{1, \dots, k\} \end{array} \right\}$$

ein <u>partieller Isomorphismus</u> von $\mathfrak{A}$ nach $\mathfrak{B}$ (siehe folgende Definition 3.2) ist.

Falls π <u>kein</u> partieller Isomorphismus von $\mathfrak{A}$ nach $\mathfrak{B}$ ist, so hat Spoiler die Partie gewonnen.

<u>Definition 3.2</u> (partieller Isomorphismus)

Sei σ eine funktionen-freie Signatur; $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ seien σ-Strukturen.

Eine Abbildung

$$\pi : \mathrm{Def}(\pi) \to \mathrm{Bild}(\pi)$$

mit $\mathrm{Def}(\pi) \subseteq A$ und $\mathrm{Bild}(\pi) \subseteq B$ heißt <u>partieller Isomorphismus</u> von $\mathfrak{A}$ nach $\mathfrak{B}$, falls gilt:

<u>(1)</u> π ist bijektiv,

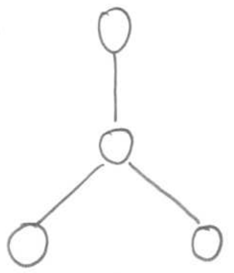
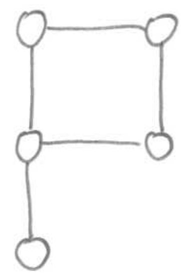
<u>(2)</u> für jedes Konstantensymbol $c \in \sigma$ ist $c^{\mathfrak{A}} \in \mathrm{Def}(\pi)$ und $\pi(c^{\mathfrak{A}}) = c^{\mathfrak{B}}$, und

<u>(3)</u> für jedes Relationssymbol $R \in \sigma$ mit $r := ar(R)$ und für alle $(a_1, \dots, a_r) \in \mathrm{Def}(\pi)^k$ gilt

$$(a_1, \dots, a_r) \in R^{\mathfrak{A}} \iff (\pi(a_1), \dots, \pi(a_k)) \in R^{\mathfrak{B}}.$$

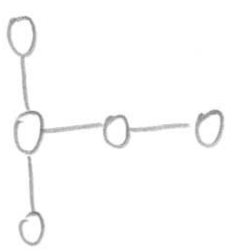
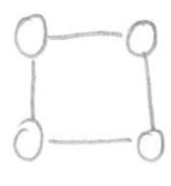
Beispiele 3.3

Sei $\sigma := \{E_2\}$, $k := 0$

(a) $\mathfrak{A} :=$  $\mathfrak{B} :=$ 

Spoiler gewinnt das 2-Runden EF-Spiel auf $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$, indem er folgendermaßen spielt:

- Runde 1: Wähle denjenigen Knoten a_1 in $\mathfrak{A}$, der mit allen anderen Knoten durch eine Kante verbunden ist
- Runde 2: Wähle einen Knoten b_2 in $\mathfrak{B}$, der nicht zum Knoten b_1 benachbart ist.

(b) $\mathfrak{A} :=$  $\mathfrak{B} :=$ 

Duplicator gewinnt das 2-Runden EF-Spiel auf $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$, denn in beiden Graphen gibt es zu jedem Knoten sowohl einen Nachbarn als auch einen Nicht-Nachbarn.

(c) Spoiler gewinnt das 3-Runden EF-Spiel auf den Graphen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ aus (b), indem er in den ersten 3 Runden 3 verschiedene nicht benachbarte Knoten in $\mathfrak{A}$ wählt.

Notation 3.4:

Wir schreiben $\mathfrak{G}_m(\mathfrak{A}, \vec{a}', \mathfrak{B}, \vec{b}')$, um das m-Runden EF-Spiel auf $(\mathfrak{A}, \vec{a}')$ und $(\mathfrak{B}, \vec{b}')$ zu bezeichnen.
Ist $k=0$ (d.h. $\vec{a}'$ und $\vec{b}'$ sind leer), so schreiben wir auch kurz $\mathfrak{G}_m(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ an Stelle von $\mathfrak{G}_m(\mathfrak{A}, \vec{a}', \mathfrak{B}, \vec{b}')$.

Bemerkung 3.5

Anschaulich ist die Gewinnbedingung im EF-Spiel so gewählt, dass die Ziele von Spoiler und Duplicator folgendermaßen beschrieben werden können:
Spoilers Ziel ist es, zu zeigen, dass die beiden