Kapitel 2: Normalformen

2.1 Äquivalenz und Folgerung

Definition 2.1 (Äquivalenz, Folgerung)

Seien $\varphi, \psi \in \mathrm{FO}[\sigma]$

a) φ und ψ heißen äquivalent (kurz: $\varphi \equiv \psi$, bzw $\varphi \mathrel{=\joinrel\mathrel{|}\joinrel\mathrel{|}\joinrel=} \psi$) wenn für alle zu φ und ψ passenden σ-Interpretationen $\mathcal{I}$ gilt: $\mathcal{I} \models \varphi \iff \mathcal{I} \models \psi$

(b) ψ folgt aus φ (bzw φ impliziert ψ, kurz: $\varphi \models \psi$) wenn für alle zu φ und ψ passenden σ-Interpretationen $\mathcal{I}$ gilt:

Falls $\mathcal{I} \models \varphi$, so auch $\mathcal{I} \models \psi$.

Beobachtung: Für alle $\varphi, \psi \in \mathrm{FO}[\sigma]$ gilt:

- $\varphi \equiv \psi \iff \varphi \models \psi$ und $\psi \models \varphi$
- $\varphi \models \psi \iff (\varphi \to \psi)$ ist allgemeingültig
- $\varphi \equiv \psi \iff (\varphi \leftrightarrow \psi)$ ist allgemeingültig

Beobachtung 2.2

Für alle $\varphi, \psi \in FO[\sigma]$ gilt:

- $(\varphi \wedge \psi) \quad \equiv \quad \neg(\neg\varphi \vee \neg\psi)$
- $(\varphi \rightarrow \psi) \quad \equiv \quad (\neg\varphi \vee \psi)$
- $(\varphi \leftrightarrow \psi) \quad \equiv \quad (\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \varphi)$

  $\qquad\qquad\quad \equiv \quad \big(\neg(\varphi \vee \psi) \vee \neg(\neg\varphi \vee \neg\psi)\big)$
- $\forall x\, \varphi \quad \equiv \quad \neg\exists x\, \neg\varphi$

Daher können wir, falls nötig, auf die Symbole $\wedge, \rightarrow, \leftrightarrow, \forall$ verzichten. D.h.: Jede $FO[\sigma]$-Formel φ ist äquivalent zu einer $FO[\sigma]$-Formel, in der keins der Symbole $\wedge, \rightarrow, \leftrightarrow, \forall$ vorkommt.

_.2 Das Substitutionslemma

Anschaulich besagt das Substitutionslemma folgendes:

Sei φ eine $FO[\sigma]$-Formel.
Ersetzt man in φ eine freie Variable x durch einen Term $t(y_1, \dots, y_n)$, so sagt die dadurch entstehende Formel φ' über den Term $t(y_1, \dots, y_n)$ das selbe aus wie die Formel φ über die Variable x.

Etwas Vorsicht ist allerdings beim "Ersetzen" geboten:

TU

<u>Beispiel 2.3:</u>

Betrachte die $FO[\sigma_{Ar}]$-Formel

$$\varphi(v_0) := \exists v_1 \; v_1 + v_1 = v_0 ,$$

die in $\mathcal{N}$ besagt, dass v_0 eine gerade Zahl ist.

(a) Ersetzt man die Variable v_0 durch die Variable v_5, so erhält man die Formel

$$\varphi(v_5) = \exists v_1 \; v_1 + v_1 = v_5 ,$$

die in $\mathcal{N}$ besagt, dass v_5 gerade ist.

(b) Ersetzt man die Variable v_0 durch den Term $(v_0 \times v_0) + 1$ so erhält man die Formel

$$\exists v_1 \; v_1 + v_1 = (v_0 \times v_0) + 1 ,$$

die in $\mathcal{N}$ besagt, dass $(v_0 \times v_0) + 1$ gerade ist.

(c) Ersetzt man aber die (gebundene) Variable v_1 durch die (freie) Variable v_0, so erhält man die Formel

$$\exists v_0 \; v_0 + v_0 = v_0$$

Diese Formel hat eine völlig andere Bedeutung als die Formel $\varphi(v_0)$.
Daher sollte man nur freie Variablen ersetzen!

(d) Ersetzt man die (freie) Variable v_0 durch v_1, so erhält man die Formel

$$\exists v_1 \; v_1 + v_1 = v_1$$

die ähnlich wie in (c) eine ganz andere Bedeutung hat als die Formel $\varphi(v_0)$.

Beim Ersetzen von freien Variablen muss man daher aufpassen, dass es keine Konflikte mit gebundenen Variablen gibt. Die gebundenen Variablen werden daher – falls nötig – umbenannt.

Der Begriff des "Ersetzens" von Variablen wird daher folgendermaßen formalisiert:

Definition 2.4

(a) Eine <u>σ-Substitution</u> ist eine Abbildung
$$S : D \to T_\sigma ,$$
wobei $D = \mathrm{Def}(S) \subseteq \mathrm{Var}$ endlich ist.

(b) Für eine <u>σ-Substitution</u> S sei <u>$\mathrm{var}(S)$</u> die Menge aller Variablen, die in einem Term im Bild von S vorkommen. D.h.:
$$\mathrm{var}(S) := \bigcup_{x \in \mathrm{def}(S)} \mathrm{var}(S(x))$$

Definition 2.5 (Substitution in Termen)

Sei S eine σ-Substitution.
Induktiv über den Aufbau von T_σ definieren wir für jedes $t \in T_\sigma$ den Term tS, der aus t durch Anwenden der Substitution S entsteht.

- f.a. $x \in \mathrm{Var}$ ist

$$xS := \begin{cases} S(x), & \text{falls } x \in \mathrm{Def}(S) \\ x & \text{sonst.} \end{cases}$$

- f.a. Konstantensymbole $c \in \sigma$ ist

$$cS := c$$

- f.a. $k \in \mathbb{N}_{>0}$, f.a. k-stelligen Funktionssymbole $f \in \sigma$, f.a. σ-Terme $t_1, \dots, t_k$ ist

$$[f t_1 \cdots t_k] S := f [t_1 S] \dots [t_k S]$$

Definition 2.6 (Substitution in Formeln)

Induktiv über den Aufbau von $FO[\sigma]$ definieren wir für alle σ-Substitutionen S und alle $FO[\sigma]$-Formeln φ die Formel φS, die aus φ

durch <u>Anwenden</u> der Substitution S entsteht:

- Ist φ von der Form $t_1 = t_2$ mit $t_1, t_2 \in T_\sigma$, so
$$\varphi S := t_1 S = t_2 S$$

- Ist φ von der Form $R t_1 \dots t_k$ mit $R \in \sigma$, $k = ar(R)$, $t_1, \dots, t_k \in T_\sigma$, so
$$\varphi S := R t_1 S \dots t_k S$$

- Ist φ von der Form $\neg \psi$ mit $\psi \in FO[\sigma]$, so
$$\varphi S := \neg \psi S$$

- Ist φ von der Form $(\psi_1 * \psi_2)$ mit $\psi_1, \psi_2 \in FO[\sigma]$, $* \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$, so
$$\varphi S := (\psi_1 S * \psi_2 S)$$

- Ist φ von der Form $Qx\psi$ mit $Q \in \{\exists, \forall\}$, $x \in Var$, $\psi \in FO[\sigma]$, so ist
$$\varphi S := Qy\, \psi S',$$
wobei y und S' folgendermaßen gewählt sind:
  - falls $x \notin var(S)$, so $y := x$ und $S' := S|_{Def(S) \setminus \{x\}}$
  - falls $x \in var(S)$, so ist y die in der Aufzählung $v_0, v_1, v_2, v_3, \dots$ von Var erste Variable, die <u>nicht</u> in φ vorkommt und <u>nicht</u> in $var(S)$.

$$S' := S|_{\mathrm{Def}(S) \setminus \{x\}} \cup \{(x,y)\}.$$

(d.h.: die Variable x wird konsistent umbenannt zu y).

Notation 2.7:

(a) Wir schreiben σ-Substitutionen S mit $\mathrm{Def}(S) = \{x_1, \ldots, x_n\}$ und $t_i = S(x_i)$ für $i = 1, \ldots, n$ auch in der Form

$$\frac{t_1, \ldots, t_n}{x_1, \ldots, x_n}$$

Insbes. schreiben wir für $\mathrm{FO}[\sigma]$-Formeln φ auch

$$\varphi \frac{t_1, \ldots, t_n}{x_1, \ldots, x_n} \quad \text{an Stelle von} \quad \varphi S.$$

(b) Für eine Formel $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ mit $\mathrm{frei}(\varphi) \subseteq \{x_1, \ldots, x_n\}$ und für Terme $t_1, \ldots, t_n$ schreiben wir auch

$$\varphi(t_1, \ldots, t_n) \quad \text{an Stelle von} \quad \varphi \frac{t_1, \ldots, t_n}{x_1, \ldots, x_n}.$$

Entsprechende Schreibweisen verwenden wir auch für Terme

Beispiele 2.8

Sei $\sigma := \{\underset{2}{f}, \underset{2}{R}\}$.

(a) Für $\varphi := Rv_0 f v_1 v_2$ gilt

$$\varphi \frac{v_2, v_0, v_1}{v_1, v_2, v_3} = Rv_0 f v_2 v_0$$

(b) Für $\varphi := \exists v_0\, Rv_0 f v_1 v_2$ gilt

$$\varphi \frac{v_4, f v_1 v_1}{v_0 \quad v_2} = \exists v_0 \left(Rv_0 f v_1 v_2 \frac{f v_1 v_1}{v_2} \right)$$

$$= \exists v_0\, Rv_0 f v_1 f v_1 v_1$$

(c) Für $\varphi := \exists v_0\, Rv_0 f v_1 v_2$ gilt

$$\varphi \frac{v_0 \quad v_4}{v_1 \quad v_0} = \exists v_3 \left(Rv_0 f v_1 v_2 \frac{v_0 \quad v_3}{v_1 \quad v_0} \right)$$

$$= \exists v_3\, Rv_3 f v_0 v_2.$$

Definition 2.9 (Anwenden von Substitutionen auf Interpretationen)

Für jede σ-Substitution S und jede σ-Interpretation $\mathcal{I} = (\mathfrak{A}, \beta)$ mit $\mathrm{var}(S) \subseteq \mathrm{def}(\beta)$ sei

$$\mathcal{I}S := (\mathfrak{A}, \beta S),$$ wobei

$\beta S : \mathrm{Def}(\beta) \cup \mathrm{Def}(S) \to A$ die folgendermaßen definierte Belegung ist:

- f.a. $x \in \mathrm{Def}(S)$ ist $\beta S(x) := [\![S(x)]\!]^{\mathcal{I}}$
- f.a. $x \in \mathrm{Def}(\beta) \setminus \mathrm{Def}(S)$ ist $\beta S(x) := \beta(x)$

Satz 2.10 (Das Substitutionslemma)

Sei S eine σ-Substitution und sei $\mathcal{I} = (\mathfrak{A}, \beta)$ eine σ-Interpretation mit $\mathrm{var}(S) \subseteq \mathrm{Def}(\beta)$.

(a) Für alle σ-Terme t mit $\mathrm{var}(t) \subseteq \mathrm{Def}(\beta) \cup \mathrm{Def}(S)$ gilt: $$[\![tS]\!]^{\mathcal{I}} = [\![t]\!]^{\mathcal{I}S}$$

(b) Für alle $FO[\sigma]$-Formeln φ mit $\mathrm{frei}(\varphi) \subseteq \mathrm{Def}(\beta) \cup \mathrm{Def}(S)$ gilt: $$\mathcal{I} \models \varphi S \iff \mathcal{I}S \models \varphi.$$

__Beweis__: Übung (per Induktion über den Aufbau von Termen bzw. Formeln).

2.3 Die pränexe Normalform

Definition 2.11

(a) Eine $FO[\sigma]$-Formel ψ heißt quantorenfrei, falls in ihr keins der Symbole $\exists, \forall$ vorkommt

(b) Eine $FO[\sigma]$-Formel φ ist in pränexer Normalform (bzw Pränex-Normalform), wenn sie von der Form

$$Q_1 x_1 \cdots Q_n x_n \, \psi$$

ist, wobei $n \geq 0$, $Q_1, \ldots, Q_n \in \{\exists, \forall\}$, $x_1, \ldots, x_n \in Var$ und ψ quantorenfrei ist.

$Q_1 x_1 \cdots Q_n x_n$ wird Quantoren-Präfix von φ genannt; ψ heißt Kern von φ (bzw Matrix von φ).

Satz 2.12 (Satz über die pränexe Normalform)

Jede $FO[\sigma]$-Formel φ ist äquivalent zu einer $FO[\sigma]$-Formel φ' in pränexer Normalform mit $frei(\varphi') = frei(\varphi)$.

Bevor wir Satz 2.12 beweisen, betrachten wir zunächst ein Beispiel:

Beispiel 2.13

Sei $\varphi(y) := \forall x \neg(\exists y\, Exy \to \exists x\, Exy)$

Umformung in eine äquivalente Formel in Pränex-Normalform:

$\varphi \equiv \forall x\, \neg(\neg\exists y\, Exy \lor \exists x\, Exy)$	Elimination von "$\to$"
$\equiv \forall x\, \neg(\forall y \neg Exy \lor \exists x\, Exy)$	$\neg\exists y \psi \equiv \forall y \neg\psi$
$\equiv \forall x\, \neg(\forall z_1 \neg Exz_1 \lor \exists z_2\, Ez_2y)$	Umbenennung von gebundenen Variablen
$\equiv \forall x\, \neg \forall z_1 \exists z_2 (\neg Exz_1 \lor Ez_2y)$	Zusammenlegung der Disjunktion
$\equiv \forall x\, \exists z_1 \forall z_2 \neg(\neg Exz_1 \lor Ez_2y)$	Negation
$\left(\equiv \forall x \exists z_1 \forall z_2 (Exz_1 \land \neg Ez_2y)\right)$	(De Morgan)