Satz 9.50 lässt sich sehr leicht beweisen, wenn man den folgenden Satz von Löb verwendet:

<u>Satz 9.51</u> (Der Satz von Löb)

Sei T eine effektiv axiomatisierbare σ_{Ar}-Theorie mit $PA \subseteq T$.
Dann gilt für jeden $FO[\sigma_{Ar}]$-Satz φ:

$$T \vdash_{\mathfrak{S}} \varphi \iff T \vdash_{\mathfrak{S}} \left(Bew_T(\underline{n_\varphi}) \to \varphi \right).$$

<u>Beachte</u>: • Die Richtung "$\Rightarrow$" gilt trivialerweise. Hinweise zum Beweis der Richtung "$\Leftarrow$" werden gleich noch gegeben.

• Aus Korollar 9.42 wissen wir bereits, dass gilt:
Falls $T \vdash_{\mathfrak{S}} \varphi$, so $T \vdash_{\mathfrak{S}} Bew_T(\underline{n_\varphi})$

Beweis von Gödels 2. Unvollständigkeitssatz unter Verwendung des Satzes von Löb:

Sei T eine widerspruchsfreie, effektiv axiomatisierbare σ_{Ar}-Theorie mit $PA \subseteq T$.

Zu zeigen: $T \nvdash_g Wfrei_T$

Beweis durch Widerspruch: Angenommen, $T \vdash_g Wfrei_T$.

Gemäß Definition 9.47 gilt:

$$Wfrei_T \underset{Def}{=} \neg Bew_T(\underline{n_{0=1}})$$

Somit gilt:

$$T \vdash_g Wfrei_T$$

$\Rightarrow$ $T \vdash_g \neg Bew_T(\underline{n_{0=1}})$

$\Rightarrow$ für jeden $FO[\sigma_{Ar}]$-Satz φ gilt: $T \vdash_g (Bew_T(\underline{n_{0=1}}) \rightarrow \varphi)$

$\Rightarrow$ insbes. gilt für $\varphi := 0=1$:

$$T \vdash_g (Bew_T(\underline{n_{0=1}}) \rightarrow 0=1)$$

$\Rightarrow$ Aus dem Satz von Löb (Satz 9.51) folgt, dass

$$T \vdash_g 0=1$$

Wegen $T \supseteq PA \supseteq Q$ gilt aber: $T \vdash_g \neg 0=1$.

Somit gilt: T ist widerspruchsvoll. $\lightning$ Widerspruch

$\square$ Satz 9.50

Um den Satz von Löb zu beweisen, verwendet man folgendes Lemma:

<u>Lemma 9.52</u>:
Sei T eine effektiv axiomatisierbare σ_{Ar}-Theorie mit $PA \subseteq T$. Dann gilt für alle $FO[\sigma_{Ar}]$-Sätze φ und ψ:

(a) Falls $T \vdash_{\mathfrak{S}} \varphi$, so $T \vdash_{\mathfrak{S}} Bew_T(\underline{n_\varphi})$.

(b) $T \vdash_{\mathfrak{S}} \Big(Bew_T(\underline{n_{\varphi\to\psi}}) \to \big(Bew_T(\underline{n_\varphi}) \to Bew_T(\underline{n_\psi}) \big) \Big)$

(c) $T \vdash_{\mathfrak{S}} \Big(Bew_T(\underline{n_\varphi}) \to Bew_T\big(\underline{n_{Bew_T(\underline{n_\varphi})}} \big) \Big)$.

(hier ohne Beweis).

<u>Einige Anmerkungen zu Lemma 9.52</u>:
Aussage (a) haben wir bereits in Korollar 9.42 nachgewiesen.
Die Beweise der Aussagen (b) und (c) sind „inhaltlich" nicht besonders schwierig, aber sehr aufwändig.
Zum besseren Verständnis der Aussage von Lemma 9.52 beachte man, dass Aussage (b) besagt, dass eine

Formalisierung der Modus Ponens Regel

$$(*) \quad T \vdash_g (\varphi \to \psi) \implies (T \vdash_g \varphi \implies T \vdash_g \psi)$$

in der Theorie T beweisbar ist.

Analog besagt Aussage (c), dass eine Formalisierung der Regel

$$T \vdash_g \varphi \implies T \vdash_g \mathrm{Bew}_T(\underline{n_\varphi})$$

(d.h. eine Formalisierung der Aussage (a))
in der Theorie T beweisbar ist.

Die Peano-Arithmetik ist stark genug, um die "normale", elementare Mathematik formal nachzuvollziehen — dazu zählt auch der Inhalt dieser Vorlesung. Insbesondere lässt sich in PA auch der Beweis der Korrektheit der Modus Ponens Regel (*) sowie der Beweis von Aussage (a) (d.h. Korollar 9.42 (b)) in PA formalisieren. Dies liefert dann die Aussagen (b) und (c) von Lemma 9.52.

Unter Verwendung von Lemma 9.52 lässt sich der Satz von Löb (Satz 9.51) folgendermaßen beweisen:

Beweis von Satz 9.51 unter Verwendung von Lemma 9.52:

Sei T eine effektiv axiomatisierbare σ_{Ar}-Theorie mit $PA \subseteq T$ und sei φ ein beliebiger $FO[\sigma_{Ar}]$-Satz.

Zu zeigen: $T \vdash_{\mathfrak{S}} \varphi \iff T \vdash_{\mathfrak{S}} (Bew_T(\underline{n_\varphi}) \to \varphi)$

"$\Longrightarrow$": folgt leicht unter Verwendung des Vollständigkeitssatzes, denn:

$$\begin{aligned} T \vdash_{\mathfrak{S}} \varphi \quad &\Rightarrow \quad T \models \varphi \\ &\Rightarrow \quad \text{f.a. } \psi \text{ gilt: } T \models (\psi \to \varphi) \\ &\Rightarrow \quad \text{insbes. für } \psi := Bew_T(\underline{n_\varphi}) \text{ gilt:} \\ &\qquad T \models (Bew_T(\underline{n_\varphi}) \to \varphi) \\ &\Rightarrow \quad T \vdash_{\mathfrak{S}} (Bew_T(\underline{n_\varphi}) \to \varphi). \end{aligned}$$

"$\Longleftarrow$": Laut Voraussetzung gilt

$$T \vdash_{\mathfrak{S}} (Bew_T(\underline{n_\varphi}) \to \varphi) \qquad (*)_1$$

Zu zeigen: $T \vdash_{\mathfrak{S}} \varphi$.

Eine Anwendung des Fixpunktsatzes (Satz 9.35) auf die Formel $(\mathrm{Bew}_T(y) \to \varphi)$ liefert einen "Fixpunkt" χ, d.h. einen $\mathrm{FO}[\sigma_{Ar}]$-Satz χ, s.d.

$$T \vdash_{\mathfrak{S}} \Big(\chi \leftrightarrow \big(\mathrm{Bew}_T(\underline{n_\chi}) \to \varphi\big)\Big) \qquad \circledast_2$$

Somit gilt:

$$T \vdash_{\mathfrak{S}} \big(\chi \to (\mathrm{Bew}_T(\underline{n_\chi}) \to \varphi)\big)$$

$\Longrightarrow$ (Lemma 9.52(a)) $$T \vdash_{\mathfrak{S}} \mathrm{Bew}_T\big(\underline{n_{(\chi \to (\mathrm{Bew}_T(\underline{n_\chi}) \to \varphi))}}\big)$$

$\Longrightarrow$ (Lemma 9.52(b) und Vollständigkeitssatz) $$T \vdash_{\mathfrak{S}} \big(\mathrm{Bew}_T(\underline{n_\chi}) \to \mathrm{Bew}_T(\underline{n_{(\mathrm{Bew}_T(\underline{n_\chi}) \to \varphi)}})\big)$$

$\Longrightarrow$ (Lemma 9.52(b)) $$T \vdash_{\mathfrak{S}} \underbrace{\Big(\mathrm{Bew}_T(\underline{n_\chi}) \to \big(\mathrm{Bew}_T(\underline{n_{\mathrm{Bew}_T(\underline{n_\chi})}}) \to \mathrm{Bew}_T(\underline{n_\varphi})\big)\Big)}_{\circledast_3}$$

Wegen Lemma 9.52(c) gilt:

$$T \vdash_{\mathfrak{S}} \big(\mathrm{Bew}_T(\underline{n_\chi}) \to \mathrm{Bew}_T(\underline{n_{\mathrm{Bew}_T(\underline{n_\chi})}})\big)$$

$\Longrightarrow$ ($\circledast_3$ und Vollst.satz) $$T \vdash_{\mathfrak{S}} \big(\mathrm{Bew}_T(\underline{n_\chi}) \to \mathrm{Bew}_T(\underline{n_\varphi})\big)$$

$\overset{\Longrightarrow}{\circledast_1}$ $T \vdash_y (\mathrm{Bew}_T(\underline{n_\chi}) \to \varphi)$ $\circledast_4$

$\overset{\Longrightarrow}{\circledast_2}$ $T \vdash_y \chi$

$\overset{\Longrightarrow}{\text{Lemma 9.52(a)}}$ $T \vdash_y \mathrm{Bew}_T(\underline{n_\chi})$ $\circledast_5$

$\overset{\Longrightarrow}{\circledast_5 \text{ und } \circledast_4 \text{ und Vollst.satz}}$ $T \vdash_y \varphi$.

$\square$ Satz 9.51.