Definition 1.25

(a) Ist β eine Belegung in einer σ-Struktur $\mathfrak{A}$, ist $x \in Var$ und ist $a \in A$, so sei $\beta\frac{a}{x}$ die Belegung mit $Def(\beta\frac{a}{x}) := Def(\beta) \cup \{x\}$, die für alle $y \in Def(\beta\frac{a}{x})$ definiert ist durch

$$\beta\frac{a}{x}(y) := \begin{cases} a & \text{falls } y = x \\ \beta(y) & \text{sonst} \end{cases}$$

(b) Ist $\mathcal{I} = (\mathfrak{A}, \beta)$ eine σ-Interpretation, ist $x \in Var$ und ist $a \in A$, so sei

$$\mathcal{I}\frac{a}{x} := (\mathfrak{A}, \beta\frac{a}{x}).$$

Definition 1.26 (Semantik der Logik erster Stufe)

Rekursiv über den Aufbau von $FO[\sigma]$ definieren wir eine Funktion $[\![\cdot]\!]^{\cdot}$, die jeder $FO[\sigma]$-Formel φ und jeder zu φ passenden σ-Interpretation $\mathcal{I} = (\mathfrak{A}, \beta)$ einen Wahrheitswert (kurz: Wert) $[\![\varphi]\!]^{\mathcal{I}} \in \{0, 1\}$ zuordnet:

- Für alle $t_1, t_2 \in T_\sigma$ ist

$$[\![t_1 = t_2]\!]^{\mathcal{I}} := \begin{cases} 1 & \text{falls } [\![t_1]\!]^{\mathcal{I}} = [\![t_2]\!]^{\mathcal{I}} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

- Für jedes $k \in \mathbb{N}_{>0}$, jedes k-stellige Relationssymbol $R \in \sigma$ und alle $t_1, \dots, t_k \in T_\sigma$ ist

$$[\![R t_1 \cdots t_k]\!]^{\mathcal{I}} := \begin{cases} 1 & \text{falls } \left([\![t_1]\!]^{\mathcal{I}}, \dots, [\![t_k]\!]^{\mathcal{I}}\right) \in R^{\mathcal{A}} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

- Für alle $\varphi \in FO[\sigma]$ ist

$$[\![\neg\varphi]\!]^{\mathcal{I}} := \begin{cases} 1 & \text{falls } [\![\varphi]\!]^{\mathcal{I}} = 0 \\ 0 & \text{falls } [\![\varphi]\!]^{\mathcal{I}} = 1 \end{cases}$$

- Für alle $\varphi_1, \varphi_2 \in FO[\sigma]$ ist
  - $$[\![(\varphi_1 \wedge \varphi_2)]\!]^{\mathcal{I}} := \begin{cases} 1 & \text{falls } [\![\varphi_1]\!]^{\mathcal{I}} = 1 \text{ und } [\![\varphi_2]\!]^{\mathcal{I}} = 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$
  - $$[\![(\varphi_1 \vee \varphi_2)]\!]^{\mathcal{I}} := \begin{cases} 1 & \text{falls } [\![\varphi_1]\!]^{\mathcal{I}} = 1 \text{ oder } [\![\varphi_2]\!]^{\mathcal{I}} = 1 \\ 0 & \text{sonst} \\ & (\text{d.h. } [\![\varphi_1]\!]^{\mathcal{I}} = 0 \text{ und } [\![\varphi_2]\!]^{\mathcal{I}} = 0) \end{cases}$$
  - $$[\![(\varphi_1 \leftrightarrow \varphi_2)]\!]^{\mathcal{I}} := \begin{cases} 1 & \text{falls } [\![\varphi_1]\!]^{\mathcal{I}} = [\![\varphi_2]\!]^{\mathcal{I}} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$
  - $$[\![(\varphi_1 \rightarrow \varphi_2)]\!]^{\mathcal{I}} := \begin{cases} 1 & \text{falls } [\![\varphi_1]\!]^{\mathcal{I}} = 0 \text{ oder } [\![\varphi_2]\!]^{\mathcal{I}} = 1 \\ 0 & \text{sonst} \\ & (\text{d.h. } [\![\varphi_1]\!]^{\mathcal{I}} = 1 \text{ und } [\![\varphi_2]\!]^{\mathcal{I}} = 0) \end{cases}$$

- Für alle $\varphi \in FO[\sigma]$ und alle $x \in Var$ ist

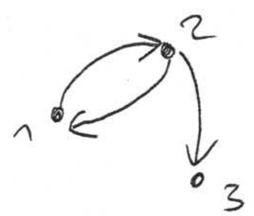
- $[\![\exists x \psi]\!]^{\mathfrak{I}} = \begin{cases} 1 & \text{falls es mindestens ein } a \in A \text{ gilt so dass } [\![\psi]\!]^{\mathfrak{I}\frac{a}{x}} = 1 \\ 0 & \text{sonst (d.h. für alle } a \in A \text{ gilt } [\![\psi]\!]^{\mathfrak{I}\frac{a}{x}} = 0) \end{cases}$

- $[\![\forall x \psi]\!]^{\mathfrak{I}} = \begin{cases} 1 & \text{falls für alle } a \in A \text{ gilt } [\![\psi]\!]^{\mathfrak{I}\frac{a}{x}} = 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

<u>Beispiel</u>:

- $\sigma := \{ \underset{2}{E} \}$, $\quad \varphi := \forall x \forall y \, (Exy \rightarrow Eyx)$,
- $\mathfrak{A} := (A, E^{\mathfrak{A}})$ mit $A = \{1, 2, 3\}$, $E^{\mathfrak{A}} = \{(1,2), (2,1), (2,3)\}$

<u>Skizze</u>: $\mathfrak{A}$:



- β die Belegung mit $Def(\beta) = \emptyset$
- $\mathfrak{I} := (\mathfrak{A}, \beta)$
- $[\![\varphi]\!]^{\mathfrak{I}} = 1 \iff$ für alle $a \in A$, für alle $b \in A$ gilt $[\![(Exy \rightarrow Eyx)]\!]^{\mathfrak{I}\frac{a}{x}\frac{b}{y}} = 1$

  $\iff$ für alle $a \in A$, für alle $b \in A$ gilt: $(a,b) \notin E^{\mathfrak{A}}$ oder $(b,a) \in E^{\mathfrak{A}}$

$\iff$ für alle $a \in A$, für alle $b \in A$ gilt:

falls $(a,b) \in E^{\mathfrak{A}}$, so auch $(b,a) \in E^{\mathfrak{A}}$.

($\iff$ $E^{\mathfrak{A}}$ ist symmetrisch.)

Da in unserem konkreten Graphen $\mathfrak{A}$ für $a=2$, $b=3$ gilt: $(a,b) \in E^{\mathfrak{A}}$, aber $(b,a) \notin E^{\mathfrak{A}}$, ist hier $[\![\varphi]\!]^{\mathcal{I}} = 0$.

<u>Definition 1.27</u> (Modell, Erfüllbarkeit, Allgemeingültigkeit)

Sei φ eine $\mathrm{FO}[\sigma]$-Formel.

<u>(a)</u> Eine σ-Interpretation $\mathcal{I} = (\mathfrak{A}, \beta)$ <u>erfüllt φ</u> (bzw: <u>ist ein Modell von φ</u>, kurz: <u>$\mathcal{I} \models \varphi$</u>), falls $\mathcal{I}$ passend zu φ ist und $[\![\varphi]\!]^{\mathcal{I}} = 1$.

<u>(b)</u> φ heißt <u>erfüllbar</u>, wenn es eine σ-Interpretation gibt, die φ erfüllt.

φ heißt <u>unerfüllbar</u>, falls φ nicht erfüllbar ist.

<u>(c)</u> φ heißt <u>allgemeingültig</u>, wenn jede zu φ passende σ-Interpretation φ erfüllt.

<u>Beobachtung</u>: Für alle $\varphi, \psi \in \mathrm{FO}[\sigma]$ gilt:

- φ allgemeingültig $\iff$ $\neg\varphi$ unerfüllbar
- φ erfüllbar $\iff$ $\neg\varphi$ nicht allgemeingültig

Beispiel 1.28 (Graphen)

$\sigma := \{ \underset{2}{E} \}$, $\mathfrak{A} := (A, E^{\mathfrak{A}})$ eine σ-Struktur.

(a) Für alle $a, b \in A$ gilt: Es gibt in $\mathfrak{A}$ einen Weg der Länge 3 von a nach b

$$\Longleftrightarrow$$

$$(\mathfrak{A}, \beta_\emptyset) \models \forall x \forall y \, \exists z_1 \exists z_2 \, (Exz_1 \wedge Ez_1z_2 \wedge Ez_2y)$$

$\beta_\emptyset :=$ die Belegung mit $Def(\beta_\emptyset) = \emptyset$

(b) $\mathfrak{A}$ hat Durchmesser ≤ 3, d.h. zwischen je zwei Knoten von $\mathfrak{A}$ gibt es einen Weg der Länge ≤ 3

$$\Longleftrightarrow$$

$$(\mathfrak{A}, \beta_\emptyset) \models \forall x \forall y \, \big(x = y \vee Exy \vee \exists z (Exz \wedge Ezy) \vee \exists z_1 \exists z_2 (Exz_1 \wedge Ez_1z_2 \wedge Ez_2y) \big)$$

Beispiel 1.29 (Arithmetik)

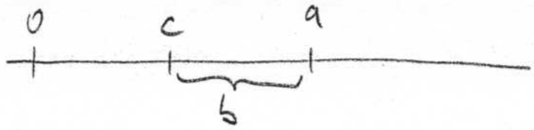
$\sigma_{Ar} = \{ \leq, +, \times, 0, 1 \}$, $\mathcal{N} := (\mathbb{N}, \leq^{\mathcal{N}}, +^{\mathcal{N}}, \times^{\mathcal{N}}, 0^{\mathcal{N}}, 1^{\mathcal{N}})$

$a, b, c \in \mathbb{N}$, β die Belegung mit $\beta(x) = a$, $\beta(y) = b$, $\beta(z) = c$

(a) $a \mid b$ ("a teilt b in $\mathbb{N}$") $\Longleftrightarrow$

$(\mathcal{N}, \beta) \models \varphi_{teilt}(x, y)$ mit

$$\varphi_{teilt}(x, y) := \exists u \; x \times u = y$$



(b) $c = a - b \iff$

$(\mathcal{W}, \beta) \models \varphi_-(x, y, z)$ mit

$\varphi_-(x, y, z) := x = y + z$

(c) a ist eine Primzahl $\iff$

$(\mathcal{W}, \beta) \models \varphi_{prim}(x)$ mit

$$\varphi_{prim}(x) := \neg x = 1 \wedge \forall u \forall v \left(x = u \times v \rightarrow (u = 1 \vee v = 1) \right)$$

(d) Es gibt unendlich viele verschiedene Primzahlen $\iff$

$(\mathcal{W}, \beta_\emptyset) \models \forall u \exists x \left(u \leq x \wedge \varphi_{prim}(x) \right)$

Die Belegung mit $Def(\beta_\emptyset) = \emptyset$

1.4 Das Koinzidenzlemma

Das Koinzidenzlemma präzisiert den (anschaulich offensichtlichen) Sachverhalt, dass die Frage, ob eine $FO[\sigma]$-Formel φ von einer σ-Interpretation $\mathcal{I} = (\mathcal{A}, \beta)$ erfüllt wird (d.h. ob $\mathcal{I} \models \varphi$ gilt), nur abhängt von

- der Belegung der in φ frei vorkommenden Variablen (dh. für Variablen $x \notin \text{frei}(\varphi)$ ist egal, welchen Wert $\beta(x)$ annimmt)
- der Interpretation $S^{\mathfrak{A}}$ der Symbole $S \in \sigma$, die in φ vorkommen
(dh für Symbole $S' \in \sigma$, die nicht in φ erwähnt werden, ist egal, wie $S^{\mathfrak{A}}$ aussieht).

Zur präzisen Formulierung des Koinzidenzlemmas sind folgende Notationen nützlich:

Definition 1.30

Seien σ_1, σ_2 zwei Signaturen.
Sei $\mathfrak{I}_1 = (\mathfrak{A}_1, \beta_1)$ eine σ_1-Struktur und sei $\mathfrak{I}_2 = (\mathfrak{A}_2, \beta_2)$ eine σ_2-Struktur mit $A_1 = A_2$
(dh $\mathfrak{A}_1$ und $\mathfrak{A}_2$ haben dasselbe Universum).

(a) $\mathfrak{I}_1$ und $\mathfrak{I}_2$ (bzw $\mathfrak{A}_1$ und $\mathfrak{A}_2$) stimmen auf einem Symbol S überein, wenn $S \in \sigma_1 \cap \sigma_2$ und $S^{\mathfrak{A}_1} = S^{\mathfrak{A}_2}$.

(b) $\mathfrak{I}_1$ und $\mathfrak{I}_2$ (bzw β_1 und β_2) stimmen auf einer Variablen x überein, wenn $x \in \text{Def}(\beta_1) \cap \text{Def}(\beta_2)$ und $\beta_1(x) = \beta_2(x)$.

Satz 1.31 (Koinzidenzlemma)

Seien $\sigma, \sigma_1, \sigma_2$ Signaturen mit $\sigma \subseteq \sigma_1 \cap \sigma_2$.
Für $i = 1,2$ sei $\mathcal{I}_i = (\mathfrak{A}_i, \beta_i)$ eine σ_i-Interpretation

(a) Sei $t \in T_\sigma$, so dass $\mathcal{I}_1$ und $\mathcal{I}_2$ auf allen in t vorkommenden Symbolen und Variablen übereinstimmen. Dann gilt: $[\![t]\!]^{\mathcal{I}_1} = [\![t]\!]^{\mathcal{I}_2}$.

(b) Sei $\varphi \in FO[\sigma]$, so dass $\mathcal{I}_1$ und $\mathcal{I}_2$ auf allen in φ vorkommenden Symbolen und auf allen freien Variablen von φ übereinstimmen.
Dann gilt: $\mathcal{I}_1 \models \varphi \iff \mathcal{I}_2 \models \varphi$.

Beweis:
Einfaches Nachrechnen: per Induktion nach dem Aufbau von T_σ ((a)) bzw. $FO[\sigma]$ ((b)).
Details: Übung (siehe auch: [EFT, Koinzidenzlemma])

$\square$

Bemerkung 1.32: Wegen des Koinzidenzlemmas können wir einerseits immer annehmen, dass Belegungen "minimal" sind (d.h. ihr Definitionsbereich enthält gerade die freien Variablen einer Formel oder eines Terms). Andererseits können wir aber auch annehmen, dass ihr Definitionsbereich "maximal" ist (d.h. alle Variablen aus Var enthält).
Beides wird gelegentlich nützlich sein.

Notationen 1.33

(a) Für $\varphi \in FO[\sigma]$ schreiben wir $\varphi(x_1, \dots, x_n)$, um anzudeuten, dass $frei(\varphi) \subseteq \{x_1, \dots, x_n\}$.

Sei $\mathcal{I} = (\mathfrak{A}, \beta)$ eine σ-Interpretation mit

$$Def(\beta) \supseteq \{x_1, \dots, x_n\} \supseteq frei(\varphi).$$

Für $i = 1, \dots, n$ sei $a_i := \beta(x_i)$.

An Stelle von $\mathcal{I} \models \varphi$ schreiben wir oft

auch $\mathfrak{A} \models \varphi\left[\frac{a_1}{x_1}, \dots, \frac{a_n}{x_n}\right]$.

Beachte: Diese Schreibweise ist zulässig, weil nach dem Koinzidenzlemma für alle σ-Interpretationen $\mathcal{I}' = (\mathfrak{A}, \beta')$ mit $\beta'(x_i) = a_i$ für $i = 1, \dots, n$ gilt:

$$\mathcal{I}' \models \varphi \iff \mathcal{I} \models \varphi.$$

(b) Um die Notation weiter zu vereinfachen schreiben wir auch kurz

$$\mathfrak{A} \models \varphi[a_1, \dots, a_n] \text{ an Stelle von } \mathfrak{A} \models \varphi\left[\frac{a_1}{x_1}, \dots, \frac{a_n}{x_n}\right].$$

(c) Für $FO[\sigma]$-Sätze φ schreiben wir einfach

$\mathfrak{A} \models \varphi$ an Stelle von "$(\mathfrak{A}, \beta) \models \varphi$, für eine Belegung β"

Beachte: Gemäß Koinzidenzlemma gilt für alle Belegungen β, β', dass $(\mathfrak{A}, \beta) \models \varphi \iff (\mathfrak{A}, \beta') \models \varphi$

(d) Ähnliche Schreibweisen verwenden wir für Terme:

- Ist $t \in T_\sigma$ mit $\mathrm{var}(t) \subseteq \{x_1, \dots, x_n\}$, so schreibe kurz auch $t(x_1, \dots, x_n)$.

- Ist $\mathcal{I} = (\mathfrak{A}, \beta)$ eine σ-Interpretation mit $\mathrm{Def}(\beta) \supseteq \{x_1, \dots, x_n\}$ und $a_i := \beta(x_i)$ für $i = 1, \dots, n$, so schreibe an Stelle von $[\![t]\!]^{\mathcal{I}}$ auch

$$t^{\mathfrak{A}}\left[\frac{a_1}{x_1}, \dots, \frac{a_n}{x_n}\right] \quad \text{bzw} \quad t^{\mathfrak{A}}[a_1, \dots, a_n].$$

- An Stelle von $[\![t]\!]^{\mathcal{I}}$ schreiben wir manchmal auch $\mathcal{I}(t)$.

Definition 1.34 (Redukte und Expansionen)

Seien σ, τ Signaturen mit $\tau \subseteq \sigma$

(a) Das <u>τ-Redukt</u> einer σ-Struktur $\mathfrak{A}$ ist die τ-Struktur $\mathfrak{A}|_\tau$ mit Universum $A|_\tau = A$, die mit $\mathfrak{A}$ auf allen Symbolen aus τ übereinstimmt

(b) Eine <u>σ-Expansion</u> einer τ-Struktur $\mathfrak{B}$ ist eine σ-Struktur $\mathfrak{A}$, für die gilt: $\mathfrak{A}|_\tau = \mathfrak{B}$.

Beispiel 1.35

Zur Erinnerung: Das Standardmodell der Arithmetik ist

$$\mathcal{N} = (\mathbb{N}, \leq^{\mathcal{N}}, +^{\mathcal{N}}, \times^{\mathcal{N}}, 0^{\mathcal{N}}, 1^{\mathcal{N}}).$$

Das $\{\leq, +, 0\}$-Redukt von $\mathcal{N}$ ist

$$\mathcal{N}|_{\{\leq,+,0\}} = (\mathbb{N}, \leq^{\mathcal{N}}, +^{\mathcal{N}}, 0^{\mathcal{N}}).$$

Die Struktur $\mathcal{N}|_{\{\leq,+,0\}}$ bezeichnet man als das Standardmodell der Presburger Arithmetik (benannt nach M. Presburger, 1904-1943).

1.5 Das Isomorphielemma

Anschaulich besagt das Isomorphielemma, dass zwei σ-Strukturen, die isomorph sind, genau dieselben FO[σ]-Sätze erfüllen.
D.h.: Isomorphe Strukturen können nicht durch FO-Sätze unterschieden werden.

Satz 1.36 (Isomorphielemma)

Sei φ ein FO[σ]-Satz und seien $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ zwei isomorphe σ-Strukturen. Dann gilt:

$$\mathcal{A} \models \varphi \iff \mathcal{B} \models \varphi.$$

<u>Beweis:</u>

Sei $\pi : \mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$ ein Isomorphismus von $\mathfrak{A}$ nach $\mathfrak{B}$.

<u>Behauptung 1</u>:
Für alle σ-Terme $t(x_1, \dots, x_n)$ und alle $a_1, \dots, a_n \in A$ gilt:

$$\pi\left(t^{\mathfrak{A}}[a_1, \dots, a_n]\right) = t^{\mathfrak{B}}[\pi(a_1), \dots, \pi(a_n)]$$

<u>Beweis:</u> Einfaches Nachrechnen per Induktion nach dem Aufbau von T_σ
Details: Übung. $\square$

<u>Behauptung 2</u>:
Für alle $FO[\sigma]$-Formeln $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ und alle $a_1, \dots, a_n \in A$ gilt:

$$\mathfrak{A} \models \varphi[a_1, \dots, a_n] \iff \mathfrak{B} \models \varphi[\pi(a_1), \dots, \pi(a_n)]$$

<u>Beweis:</u> Einfaches (aber langwieriges) Nachrechnen per Induktion nach dem Aufbau von $FO[\sigma]$.
Details: Übung. $\square$

Beachte: Die Aussage von Satz 1.36 folgt direkt aus Behauptung 2.

$\square_{\text{Satz 1.36}}$

Obiger Beweis zeigt sogar folgendes Resultat:

Korollar 1.37

Seien $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ σ-Strukturen und sei $\pi: \mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$.
Für jede $FO[\sigma]$-Formel $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ und alle $a_1, \ldots, a_n \in A$ gilt:

$$\mathfrak{A} \models \varphi[a_1, \ldots, a_n] \iff \mathfrak{B} \models \varphi[\pi(a_1), \ldots, \pi(a_n)].$$