Bzgl. des ersten Gödelschen Unvollständigkeitssatzes können wir sogar explizit eine Formel φ_T angeben, die unabhängig von T ist, d.h. für die weder $T \models \varphi_T$ noch $T \models \neg\varphi_T$ gilt.

Um eine solche Formel φ_T zu konstruieren, betrachten wir im Folgenden Beweise im Sequenzenkalkül und stellen fest, dass die Beweisbarkeit einer Aussage durch eine Σ_1-Formel definiert werden kann:

<u>Lemma 9.40</u> (Existenz von "Beweisbarkeitsformeln")

Sei T eine effektiv axiomatisierbare σ_{Ar}-Theorie. Dann gibt es eine Σ_1-Formel

$$Bew_T(x)$$

so dass für jeden $FO[\sigma_{Ar}]$-Satz φ gilt:

$$T \models \varphi \iff T \vdash_{\mathfrak{S}} \varphi \iff \mathbb{N} \models Bew_T[n_\varphi].$$

<u>Beweis:</u> T effektiv axiomatisierbar $\overset{\text{Kor. 9.5}}{\Longrightarrow}$ T r.e.

$\Longrightarrow$ $\{ n_\varphi : \varphi \text{ } FO[\sigma_{Ar}]\text{-Satz mit } T \vdash_{\mathfrak{S}} \varphi \}$ r.e.

$\underset{\text{Satz 9.23}}{\Longrightarrow}$ $\{ n_\varphi : \varphi$ FO$[\sigma_{Ar}]$-Satz mit $T \vdash_{\mathfrak{S}} \varphi \}$ ist

Σ_1-definierbar,

d.h. es gibt eine Σ_1-Formel $Bew_T(x)$ s.d. f.a. FO$[\sigma_{Ar}]$-Sätze φ gilt:

$$\mathcal{N} \models Bew_T[n_\varphi] \iff T \vdash_{\mathfrak{S}} \varphi \underset{\text{Vollst.satz}}{\iff} T \models \varphi.$$

$\square_{\text{Lemma 9.41}}$

<u>Notation 9.41</u> ("Beweisbarkeitsformeln")

Für jede effektiv axiomatisierbare σ_{Ar}-Theorie T sei im Folgenden $Bew_T(x)$ eine fest gewählte Σ_1-Formel s.d. f.a. FO$[\sigma_{Ar}]$-Sätze φ gilt:

$$T \vdash_{\mathfrak{S}} \varphi \iff \mathcal{N} \models Bew_T[n_\varphi].$$

Aus Lemma 9.40 und dem Σ_1-Transfersatz (Satz 9.27) folgt unmittelbar:

Korollar 9.42

Sei T eine effektiv axiomatisierbare σ_{Ar}-Theorie. Dann gilt für jeden $FO[\sigma_{Ar}]$-Satz φ:

(a) $T \vdash_{\mathfrak{S}} \varphi \iff Q \vdash_{\mathfrak{S}} Bew_T(\underline{n_\varphi})$.

(b) Wenn $Q \subseteq T$, dann gilt:

Falls $T \vdash_{\mathfrak{S}} \varphi$, so $T \vdash_{\mathfrak{S}} Bew_T(\underline{n_\varphi})$.

Beweis: (b) folgt direkt aus (a).

Zu (a): $T \vdash_{\mathfrak{S}} \varphi$

$\overset{\text{Notation 9.41}}{\iff}$ $\mathcal{N} \models Bew_T[n_\varphi]$

$\overset{\Sigma_1\text{-Transfersatz}}{\iff}$ $Q \models Bew_T(\underline{n_\varphi})$

$\overset{\text{Vollständigkeitssatz}}{\iff}$ $Q \vdash_{\mathfrak{S}} Bew_T(\underline{n_\varphi})$

$\square$

Lemma 9.43 (Existenz von "Gödelsätzen")

Sei T eine effektiv axiomatisierbare σ_{Ar}-Theorie mit $Q \subseteq T$. Dann gibt es einen $FO[\sigma_{Ar}]$-Satz χ mit

$$T \models \left(\chi \leftrightarrow \neg Bew_T(\underline{n_\chi})\right) \qquad (*)$$

(Anschaulich besagt χ folgendes: "Ich bin nicht aus T beweisbar").

<u>Beweis:</u> Folgt direkt aus dem Fixpunktsatz (Satz 9.35) für $\varphi(y) := \neg \mathrm{Bew}_T(y)$

$\square$

<u>Notation 9.44</u>

Ein Satz χ, der die Eigenschaft $(\underline{*})$ besitzt, heißt <u>Gödelsatz für T</u>.

Gödelsätze liefern konkrete Beispiele für die Unvollständigkeit von T (vgl. Gödels ersten Unvollständigkeitssatz):

<u>Satz 9.45</u> (Präzisierung von Gödels erstem Unvollständigkeitssatz)

Sei T eine effektiv axiomatisierbare σ_{Ar}-Theorie mit $Q \subseteq T \subseteq Th(\mathcal{N})$, und sei χ ein Gödelsatz für T.

Dann ist unabhängig von T, d.h. es gilt weder $T \models \chi$ noch $T \models \neg\chi$.

<u>Beweis:</u> Beachte: $T \subseteq Th(\mathcal{N}) \Rightarrow \mathcal{N} \models T \Rightarrow$ T ist erfüllbar, also widerspruchsfrei.

Schritt 1: Angenommen, $T \models \chi$.

Gemäß der Definition des Begriffs "Gödelsatz" gilt dann auch: $T \models \neg \mathrm{Bew}_T(\underline{n_\chi})$

Wegen $\mathcal{N} \models T$ gilt dann: $\mathcal{N} \models \neg \mathrm{Bew}_T(\underline{n_\chi})$,

d.h. $\mathcal{N} \not\models \mathrm{Bew}_T[n_\chi]$.

Gemäß Notation 9.42 also $T \nvdash_g \chi$, d.h. $T \not\models \chi$

↯ Wid.

Schritt 2: Angenommen, $T \models \neg\chi$

Gemäß der Definition des Begriffs "Gödelsatz" gilt dann auch: $T \models \mathrm{Bew}_T(\underline{n_\chi})$

Wegen $\mathcal{N} \models T$ gilt dann: $\mathcal{N} \models \mathrm{Bew}_T[n_\chi]$.

Gemäß Notation 9.42 also $T \vdash_g \chi$, d.h. $T \models \chi$ ↯ Wid.

□

Zur Erinnerung:

Aus Korollar 9.3 wissen wir, dass die Menge aller allgemeingültigen $FO[\sigma_{Ar}]$-Sätze rekursiv aufzählbar ist.

Als einfache Folgerung aus Satz 9.38 erhalten wir:
Unentscheidbarkeit von Q

Satz 9.46

Die Menge aller allgemeingültigen $FO[\sigma_{Ar}]$-Sätze ist rekursiv aufzählbar, aber nicht entscheidbar.

Beweis: Die rekursive Aufzählbarkeit folgt aus Kor. 9.3.

Angenommen, die Menge aller allgemeingültigen $FO[\sigma_{Ar}]$-Sätze wäre entscheidbar.
Wir zeigen, dass dann auch Q entscheidbar wäre und erhalten damit einen Widerspruch zu Satz 9.38.

Sei $\psi_Q := \bigwedge_{i=1}^{9} \psi_{(Qi)}$ die Konjunktion der $FO[\sigma_{Ar}]$-Sätze $\psi_{(Q1)}, \dots, \psi_{(Q9)}$, die gemäß Def. 9.25 die minimale Arithmetik Q axiomatisieren.

Dann gilt für jeden $\mathrm{FO}[\sigma_{Ar}]$-Satz ξ:

$$\xi \in Q \iff \psi_Q \models \xi$$

$$\iff (\psi_Q \to \xi) \text{ ist allgemeingültig.}$$

Somit wäre Q entscheidbar: Indem man bei Eingabe von ξ den Satz $(\psi_Q \to \xi)$ bildet und testet, ob $(\psi_Q \to \xi)$ allgemeingültig ist, kann man testen, ob $\xi \in Q$ ist.

$\lightning$ Widerspruch zu Satz 9.38.

$\square$ Satz 9.46.

9.6 Gödels zweiter Unvollständigkeitssatz

Das Hilbertsche Programm

Ziel: Rechtfertigung der Korrektheit der modernen abstrakten Mathematik (mit all ihren Beweistechniken)

Methode: durch eine Reduktion auf eine "unanfechtbare" finite Mathematik

Etwas genauer:

- "Abstrakte Mathematik":
  - beliebige Aussagen
  - abstrakte Beweistechniken
  - Formalisierung: eine beliebige Theorie A
- "Finite Mathematik":
  - nur "reale Aussagen", d.h. Aussagen der Form $\forall x\, \varphi(x)$ mit $\varphi(x) \in \Delta_0$
  - "finite" Beweismethoden (etwa: Beweise im Sequenzenkalkül)
  - Formalisierung: eine geeignete Theorie F mit $Q \subseteq F \subseteq A$
  - Notation: Eine "reale Aussage" $\forall x\, \varphi(x)$ heißt wahr, wenn sie im Standardmodell $\mathcal{N}$ der Arithmetik gilt.

(Zur Erinnerung: Gemäß Vollständigkeitssatz gilt f.a. $\Phi \subseteq FO[\sigma]$ und f.a. $\varphi \in FO[\sigma]$:

$$\Phi \models \varphi \iff \Phi \vdash_{\mathcal{S}} \varphi$$

d.h. im Sequenzenkalkül lassen sich genau diejenigen Aussagen beweisen, die semantisch folgen.)

- Möglicherweise kann A eine Theorie über einer größeren Signatur σ als σ_{Ar} sein, damit $FO[\sigma]$-Formeln auch über andere mathematische Objekte als natürliche Zahlen sprechen können.

- Beachte: Formale Beweise in der Theorie A sind "finite Objekte", über die man mittels einer geeigneten Kodierung in der Theorie F sprechen kann.

Ziele von Hilberts Programm:

Ziel 1: Finiter Beweis der Korrektheit der abstrakten Mathematik (Formal: ein Beweis in F, dass alle in A beweisbaren realen Aussagen wahr sind)

Ziel 2: Finiter Beweis der Widerspruchsfreiheit der abstrakten Mathematik. (Formal: ein Beweis in F, dass A widerspruchsfrei ist)

<u>Behauptung:</u> Die beiden Ziele sind äquivalent, d.h.: A ist widerspruchsfrei $\iff$ alle in A beweisbaren realen Aussagen sind wahr.

<u>Beweis:</u>

<u>"$\Leftarrow$":</u>

Angenommen, A wäre <u>nicht</u> widerspruchsfrei. (also <u>nicht</u> erfüllbar)

Dann sind <u>alle</u> Aussagen aus A beweisbar.

Somit gibt es reale Aussagen, die in A beweisbar sind, aber nicht wahr sind.

<u>"$\Rightarrow$":</u>

A sei widerspruchsfrei.

Angenommen, es gibt eine reale Aussage der ~~Form~~ $\forall x\, \psi(x)$ (mit $\psi(x) \in \Delta_0$) s.d.

$$A \vDash \forall x\, \psi(x),$$

die nicht wahr ist, d.h. $\mathcal{N} \nvDash \forall x\, \psi(x)$.

Dann ex. $n \in \mathbb{N}$ mit $\mathcal{N} \vDash \neg\psi(\underline{n})$.

Wegen $\neg\psi(x) \in \Delta_0$ und $Q \subseteq A$ liefert der Σ_1-Transfersatz (Satz 9.27), dass $A \vDash \neg\psi(\underline{n})$.

Wegen $A \vDash \forall x\, \psi(x)$, gilt aber auch: $A \vDash \psi(\underline{n})$.

↯ Widerspruch zu "A ist widerspruchsfrei".

$\square$

Der zweite Gödelsche Unvollständigkeitssatz besagt, dass Ziel 2 nicht erreichbar ist, d.h. dass es keinen Beweis in $\mathcal{F}$ gibt, der die Widerspruchsfreiheit von A nachweist.

Um dies zu beweisen, nutzen wir die Beweisbarkeitsformel $Bew_T(x)$ und konstruieren eine Formel $Wfrei_T$, die besagt, dass die Theorie T widerspruchsfrei ist:

~~Unter Nutzung der Beweisbarkeitsformel $Bew_T(x)$ kann man leicht eine Formel konstruieren, die besagt, dass die Theorie T widerspruchsfrei ist:~~

<u>Definition 9.47</u> (Konsistenzsatz Wfrei_T)

Sei T eine effektiv axiomatisierbare σ_{Ar}-Theorie mit $Q \subseteq T$.

Der <u>Konsistenzsatz für T</u> ist der $FO[\sigma_{Ar}]$-Satz

$$\mathrm{Wfrei}_T := \neg Bew_T(\underline{n_{0=1}})$$

<u>Lemma 9.48</u>

Für jede effektiv axiomatisierbare σ_{Ar}-Theorie T mit $Q \subseteq T$ gilt:

$$T \text{ ist widerspruchsfrei} \iff \mathbb{N} \models \mathrm{Wfrei}_T.$$

<u>Beweis:</u> T widerspruchsfrei

$\iff$ T nicht widerspruchsvoll

$\iff$ $T \nvdash_{\mathfrak{S}} 0=1$

$\iff$ $\mathbb{N} \not\models Bew_T(\underline{n_{0=1}})$

$\iff$ $\mathbb{N} \models \neg Bew_T(\underline{n_{0=1}})$. $\square$

Bemerkung:

Man beachte, dass der Satz $Wfrei_T$ äquivalent zu einem Satz der Form $\forall x\, \varphi(x)$ (mit $\varphi(x) \in \Delta_0$) ist.

Somit ist der Satz $Wfrei_T$ eine "reale Aussage" im Sinne des Hilbertschen Programms.

Gödels 2. Unvollständigkeitssatz besagt, dass $T \nvdash_g Wfrei_T$, sofern T eine effektiv axiomatisierbare, widerspruchsfreie Erweiterung der so genannten Peano-Arithmetik ist:

Definition 9.49 (Die Peano-Arithmetik PA)

Die Peano-Arithmetik PA ist die σ_{Ar}-Theorie, die von den Axiomen $\psi_{(Q1)}, \ldots, \psi_{(Q9)}$ der Theorie Q sowie von den folgenden Induktionsaxiomen $\psi_{(Ind, \varphi)}$ axiomatisiert wird:

Für jede $FO[\sigma_{Ar}]$-Formel $\varphi(x)$ sei

$$\psi_{(Ind,\varphi)} := \Big(\big(\underbrace{\varphi(\underline{0})}_{\text{"Induktionsanfang"}} \wedge \underbrace{\forall x \big(\varphi(x) \to \varphi(x+1)\big)}_{\text{"Induktionsschritt"}} \big) \to \forall x\, \varphi(x) \Big).$$

<u>Klar:</u>
- $\mathbb{N} \models PA$
- $Q \subseteq PA \subseteq Th(\mathbb{N})$
- PA ist effektiv axiomatisierbar.

Wir können nun Gödels zweiten Unvollständigkeitssatz formulieren:

<u>Satz 9.50</u> (Gödels zweiter Unvollständigkeitssatz)
Für jede widerspruchsfreie, effektiv axiomatisierbare σ_{Ar}-Theorie T mit $PA \subseteq T$ gilt:

$$T \not\vdash_{\mathfrak{S}} \text{Wfrei}_T$$

(d.h. die Widerspruchsfreiheit von T kann nicht mit den in T verfügbaren Mitteln bewiesen werden).