Beweis von Lemma 9.34 (a):

Sei $f: \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ durch die Δ_1-Formel $\psi(x_1, \dots, x_k, y)$ definiert. Zu zeigen: f ist repräsentierbar in Q.

Sei $\varphi(x_1, \dots, x_k, y)$ die folgende $\mathrm{FO}[\sigma_{Ar}]$-Formel:

$$\varphi(x_1, \dots, x_k, y) := \Big(\psi(x_1, \dots, x_k, y) \wedge \forall y' < y \ \neg \psi(x_1, \dots, x_k, y') \Big)$$

Im Folgenden zeigen wir, dass φ die Funktion f in Q repräsentiert.
Sei dazu $\mathfrak{A}$ ein beliebiges Modell von Q.

Behauptung 1:
F.a. $m_1, \dots, m_k, n \in \mathbb{N}$ mit $f(m_1, \dots, m_k) = n$ gilt:

$$\mathfrak{A} \models \varphi(\underline{m_1}, \dots, \underline{m_k}, \underline{n})$$

Beweis:

Es gilt: $f(m_1, \dots, m_k) = n \underset{\psi \text{ def. } f}{\Longrightarrow} \mathcal{N} \models \psi[m_1, \dots, m_k, n]$

$\underset{\substack{\Sigma_1\text{-Transfersatz} \\ \text{bzw Lemma 9.30 b)}}}{\Longrightarrow} \quad \mathfrak{A} \models \psi[\underline{m_1}^{\mathfrak{A}}, \dots, \underline{m_k}^{\mathfrak{A}}, \underline{n}^{\mathfrak{A}}]$.

Außerdem gilt f.a. $n' < n$: $f(m_1, \dots, m_k) \neq n' \Longrightarrow$
$\mathcal{N} \models \neg\psi[m_1, \dots, m_k, n'] \Longrightarrow \mathfrak{A} \models \neg\psi[\underline{m_1}^{\mathfrak{A}}, \dots, \underline{m_k}^{\mathfrak{A}}, \underline{n'}^{\mathfrak{A}}]$.

Somit gilt gemäß Lemma 9.28 b) und dem Substitutionslemma, dass $\mathfrak{N} \models \forall y' < n \; \neg\psi(\underline{m_1}, \dots, \underline{m_k}, \underline{n})$

Somit gilt gemäß Definition von φ, dass

$$\mathfrak{N} \models \varphi(\underline{m_1}, \dots, \underline{m_k}, \underline{n}). \qquad \square_{\text{Beh } 1}$$

Behauptung 2:

$$\mathfrak{N} \models \underbrace{\forall x_1 \dots \forall x_k \forall y_1 \forall y_2 \Big(\big(\varphi(x_1 \dots x_k, y_1) \wedge \varphi(x_1 \dots x_k, y_2)\big) \to y_1 = y_2 \Big)}_{=: \chi}$$

Beweis:

Seien $a_1, \dots, a_k, b_1, b_2 \in A$ so dass

$$\mathfrak{N} \models \varphi[a_1, \dots, a_k, b_1] \text{ und}$$

$$\mathfrak{N} \models \varphi[a_1, \dots, a_k, b_2]$$

Zu zeigen: $b_1 = b_2$.

Wegen $\mathfrak{N} \models Q$ und $\psi_{(Q9)} \in Q$ gilt dann:

$b_1 \leq^{\mathfrak{N}} b_2$ oder $b_2 \leq^{\mathfrak{N}} b_1$. OBdA gelte $b_1 \leq^{\mathfrak{N}} b_2$.

Es gilt:

$$\mathfrak{N} \models \varphi[a_1, \dots, a_k, b_2]$$

$$\underset{\text{Def von } \varphi}{\Longrightarrow} \quad \mathfrak{N} \models \Big(\forall y' < y \;\; \neg\psi(x_1, \dots, x_k, y')\Big)\left[\frac{a_1}{x_1}, \dots, \frac{a_k}{x_k}, \frac{b_2}{y}\right]$$

Außerdem gilt: $\mathfrak{N} \models \varphi[a_1, \dots, a_k, b_1]$ und somit

$\mathfrak{N} \models \psi[a_1, \dots, a_k, b_1]$

Daraus folgt, dass $b_1 = b_2$ und daher $\mathfrak{N} \models \chi$.

$\square_{\text{Beh 2}}$

Beachte: Aus den Behauptungen 1 und 2 folgt gemäß Definition 9.32, dass die Formel φ die Funktion f in Q repräsentiert.

$\square$ Beweis von Lemma 9.34 (a)

Beweis von Lemma 9.34 (b)

Sei $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ TM-berechenbar.

Gemäß Satz 9.23 wissen wir, dass f Σ_1-definierbar ist, d.h. es gibt eine Σ_1-Formel $\varphi_f(x_1, \dots, x_k, y)$ der Form

$$\exists z\, \psi(x_1, \dots, x_k, y, z) \qquad \text{mit } \psi \in \Delta_0,$$

die f definiert.

Sei $g : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ die folgendermaßen gewählte Funktion: Für alle $m_1, \dots, m_k \in \mathbb{N}$ sei

$$g(m_1, \dots, m_k) := \min \{ p \in \mathbb{N} : \text{es gibt } n, \ell \leq p \text{ s.d. } \mathcal{N} \models \psi[m_1, \dots, m_k, n, \ell] \}.$$

Offensichtlicherweise wird g durch die folgende Δ_0-Formel $\chi(x_1, \dots, x_k, w)$ definiert:

$$\chi(x_1, \dots, x_k, w) := \exists y \leq w\ \exists z \leq w \Big(\psi(x_1, \dots, x_k, y, z) \ \wedge \ \forall w' \leq w\ \neg \big(\exists y' \leq w'\ \exists z' \leq w'\ \psi(x_1, \dots, x_k, y', z') \big) \Big).$$

Sei $h: \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{N}$ die folgendermaßen gewählte Funktion: Für alle $m_1, \dots, m_k, p \in \mathbb{N}$ sei

$$h(m_1, \dots, m_k, p) := \begin{cases} \min\{ n \leq p : \text{es gibt ein } \ell \leq p \text{ s.d. } \mathcal{N} \models \psi[m_1, \dots, m_k, n, \ell] \}, \\ \quad \text{falls es } n, \ell \leq p \text{ mit } \mathcal{N} \models \psi[m_1, \dots, m_k, n, \ell] \text{ gibt} \\ 0 \quad \text{sonst} \end{cases}$$

Die Funktion h wird durch die folgende Δ_0-Formel definiert:

$$\xi(x_1, \dots, x_k, w, y) :=$$
$$\Big(\big(y = 0 \wedge \neg \exists y' \leq w \ \exists z \leq w \ \psi(x_1, \dots, x_k, y', z) \big) \vee$$
$$\big(y \leq w \wedge \exists z \leq w \ \psi(x_1, \dots, x_k, y, z) \wedge \forall y' < y \ \neg \exists z \leq w \ \psi(x_1, \dots, x_k, y', z) \big) \Big)$$

Man sieht leicht, dass f.a. $m_1, \dots, m_k \in \mathbb{N}$ gilt:

$$f(m_1, \dots, m_k) = h(m_1, \dots, m_k, g(m_1, \dots, m_k))$$

$\square$ Beweis von Lemma 9.34 (b)

Beweis von Lemma 9.34 (c)

Sei $g: \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ durch die Formel $\varphi_g(x_1,\dots,x_k,y)$ und sei $h: \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{N}$ durch die Formel $\varphi_h(x_1,\dots,x_k,x_{k+1},y)$ in Q repräsentiert. Setze

$$\varphi(x_1,\dots,x_k,y) :\equiv \exists z \left(\varphi_g(x_1,\dots,x_k,z) \wedge \varphi_h(x_1,\dots,x_k,z,y) \right).$$

Im Folgenden zeigen wir, dass diese Formel die Funktion $f: \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ mit

$$f(m_1,\dots,m_k) = h(m_1,\dots,m_k, g(m_1,\dots,m_k))$$

in Q repräsentiert.

Behauptung 1: F.a. $m_1,\dots,m_k,n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$f(m_1,\dots,m_k) = n \implies Q \models \varphi(\underline{m_1},\dots,\underline{m_k},\underline{n}).$$

Beweis:

Sei $\ell := g(m_1,\dots,m_k)$. Dann gilt (gemäß Wahl von φ_g, φ_h, f):

$Q \models \varphi_g(\underline{m_1},\dots,\underline{m_k},\underline{\ell})$ und $Q \models \varphi_h(\underline{m_1},\dots,\underline{m_k},\underline{\ell},\underline{n})$.

Somit: $Q \models \exists z \left(\varphi_g(\underline{m_1},\dots,\underline{m_k},z) \wedge \varphi_h(\underline{m_1},\dots,\underline{m_k},z,\underline{n}) \right)$,

d.h. $Q \models \varphi(\underline{m_1},\dots,\underline{m_k},\underline{n})$

$\square$ Beh 1.

<u>Behauptung 2:</u> F.a. $m_1, \dots, m_k \in \mathbb{N}$ gilt:

$$Q \models \forall y_1 \forall y_2 \Big(\big(\varphi(\underline{m_1}, \dots, \underline{m_k}, y_1) \wedge \varphi(\underline{m_1}, \dots, \underline{m_k}, y_2) \big) \to y_1 = y_2 \Big).$$

<u>Beweis:</u> Sei $\mathfrak{N}$ ein Modell von Q und seien $m_1, \dots, m_k \in \mathbb{N}$.

Zu zeigen: $\mathfrak{N} \models \forall y_1 \forall y_2 \Big(\big(\varphi(\underline{m_1}, \dots, \underline{m_k}, y_1) \wedge \varphi(\underline{m_1}, \dots, \underline{m_k}, y_2) \big) \to y_1 = y_2 \Big)$.

Seien dazu $b_1, b_2 \in A$ s.d.

$$\mathfrak{N} \models \varphi[\underline{m_1}^{\mathfrak{N}}, \dots, \underline{m_k}^{\mathfrak{N}}, b_1] \quad \text{und} \quad \mathfrak{N} \models \varphi[\underline{m_1}^{\mathfrak{N}}, \dots, \underline{m_k}^{\mathfrak{N}}, b_2]$$

(zu zeigen: $b_1 = b_2$).
Gemäß Definition von φ gibt es daher $c_1, c_2 \in A$ s.d. gilt:

$$(*) \begin{cases} \mathfrak{N} \models \varphi_g(\underline{m_1}, \dots, \underline{m_k}, c_1) \wedge \varphi_h(\underline{m_1}, \dots, \underline{m_k}, c_1, b_1) & \text{und} \\ \mathfrak{N} \models \varphi_g(\underline{m_1}, \dots, \underline{m_k}, c_2) \wedge \varphi_h(\underline{m_1}, \dots, \underline{m_k}, c_2, b_2). \end{cases}$$

Da φ_g die Funktion g in Q repräsentiert, gilt $c_1 = c_2$.

Für $n := g(m_1, \dots, m_k) \in \mathbb{N}$ folgt außerdem:

$$\mathfrak{N} \models \varphi_g(\underline{m_1}, \dots, \underline{m_k}, \underline{n}), \quad \text{und somit gilt}$$

(da φ_g die Funktion g in Q repräsentiert): $\underline{n}^{\mathfrak{N}} = c_1 = c_2$.

Mit $(*)$ folgt daher, dass

$$\mathfrak{N} \models \varphi_h(\underline{m_1}, \dots, \underline{m_k}, \underline{n}, b_1) \quad \text{und} \quad \mathfrak{N} \models \varphi_h(\underline{m_1}, \dots, \underline{m_k}, \underline{n}, b_2).$$

Da φ_h die Funktion h in Q repräsentiert, folgt, dass

$b_1 = b_2$. $\triangleright$ Beh 2

Aus Beh 1 und Beh 2 folgt unmittelbar, dass φ die Funktion f in Q repräsentiert. $\triangleright$ Lemma 9.34

9.5 Gödels erster Unvollständigkeitssatz

Zur Erinnerung:

In Bemerkung 9.11 hatten wir jeder $\mathrm{FO}[\sigma_{Ar}]$-Formel φ eine natürliche Zahl $n_\varphi := [\langle\varphi\rangle]_{\mathbb{N}} \in \mathbb{N}$ zugeordnet (die so genannte "Gödelnummer" von φ).

Satz 9.35 (Der Fixpunktsatz)

Sei T eine σ_{Ar}-Theorie mit $Q \subseteq T$.
Dann gibt es für jede $\mathrm{FO}[\sigma_{Ar}]$-Formel $\varphi(y)$ einen $\mathrm{FO}[\sigma_{Ar}]$-Satz χ so dass gilt:

$$T \models \left(\chi \leftrightarrow \varphi(\underline{n_\chi}) \right)$$

(D.h.: Für jede Formel $\varphi(y)$ gibt es eine nat. Zahl $n \in \mathbb{N}$ und einen Satz χ, s.d. gilt:
- n ist die Gödelnummer von χ, und
- in jedem Modell $\mathfrak{A}$ von T gibt die Formel $\varphi(\underline{n})$ an, ob der Satz χ erfüllt ist oder nicht).

Beweis:

Betrachte die folgendermaßen definierte Funktion $f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$. F.a. $m_1, m_2 \in \mathbb{N}$ gilt:

$$f(m_1, m_2) := \begin{cases} n_{\psi(\underline{m_2})}, & \text{falls es eine } FO[\sigma_{Ar}]\text{-Formel } \psi(x) \text{ gibt, so dass } m_1 \text{ die Gödelnummer der Formel } \psi(x) \text{ ist} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Beachte: f ist berechenbar (da unsere Kodierung die Annahme 9.1 erfüllt).

Satz 9.33 $\Longrightarrow$ f ist in Q repräsentierbar.
Wegen $Q \subseteq T$ ist f daher auch in T repräsentierbar, etwa durch eine $FO[\sigma_{Ar}]$-Formel $\xi_f(x_1, x_2, y)$.

Beachte: Ist $m \in \mathbb{N}$ die Gödelnr. einer Formel $\psi(x)$, so gilt:
$f(m, m)$ ist die Gödelnr. der Formel $\psi(\underline{m})$.

Betrachte nun im Speziellen die Formel

$$\boxed{\psi(x) := \forall y \left(\xi_f(x, x, y) \to \varphi(y) \right)}.$$

Sei $\boxed{m \text{ die Gödelnr. der Formel } \psi(x)}$.

Daher gilt: Der Satz $\boxed{\chi := \psi(\underline{m})}$ formalisiert

die Aussage: $\boxed{\begin{array}{l}\text{Beachte: } \bullet\ \chi = \forall y\, (\xi_f(\underline{m}, \underline{m}, y) \to \varphi(y)) \\ \bullet\ f(m,m) = n_\chi \end{array}}$

"Die Formel $\varphi(y)$ ist erfüllt, wenn Variable y mit der Gödelnr. der Formel χ belegt wird".

Im Folgenden zeigen wir, dass

$$T \models (\chi \leftrightarrow \varphi(\underline{n_\chi})).$$

Dazu gehen wir in 3 Schritten vor.

Behauptung 1: $T \models \xi_f(\underline{m}, \underline{m}, \underline{n_\chi})$

Beweis: Wir wissen:

$$f(m,m) = n_\chi.$$

Da die Formel ξ_f die Funktion f in T repräsentiert gilt: $T \models \xi_f(\underline{m}, \underline{m}, \underline{n_\chi})$ $\square$ Beh 1

Behauptung 2: $T \models (\chi \to \varphi(\underline{n_\chi}))$

Beweis: Gemäß Beh 1 gilt: $T \models \xi_f(\underline{m}, \underline{m}, \underline{n_\chi})$.

Gemäß der Wahl der Formel χ gilt außerdem:

$$T \cup \{\chi\} \models \left(\xi_f(\underline{m}, \underline{m}, \underline{n_\chi}) \to \varphi(\underline{n_\chi}) \right).$$

Somit folgt:

$$T \cup \{\chi\} \models \varphi(\underline{n_\chi}), \quad \text{d.h.}$$

$$T \models (\chi \to \varphi(\underline{n_\chi})). \qquad \square_{\text{Beh 2}}$$

[<u>Behauptung 3</u>: $T \models (\varphi(\underline{n_\chi}) \to \chi)$

<u>Beweis</u>: Wegen Beh 1 und da ξ_f die Funktion f in T repräsentiert

$$T \models \forall y \left(\xi_f(\underline{m}, \underline{m}, y) \to y = \underline{n_\chi} \right).$$

Daraus folgt:

$$T \cup \{\varphi(\underline{n_\chi})\} \models \underbrace{\forall y \left(\xi_f(\underline{m}, \underline{m}, y) \to \varphi(y) \right)}_{=_{\text{Def}}\ \chi}$$

Somit gilt: $T \cup \{\varphi(\underline{n_\chi})\} \models \chi$, d.h. $T \models (\varphi(\underline{n_\chi}) \to \chi)$.

$\square_{\text{Beh3}}$

Aus Beh. 2 und Beh. 3 folgt, dass

$$T \models \left(\chi \Leftrightarrow \varphi(\underline{n_\chi}) \right)$$

$\square_{\text{Satz 9.35}}$.

Als einfache Folgerung des Fixpunktsatzes erhalten wir folgendes:

Satz 9.36 ("Unmöglichkeit der Selbstrepräsentierbarkeit")

Eine widerspruchsfreie Theorie, die Q erweitert, ist nicht in sich selbst repräsentierbar.

Präzise:

Sei T eine widerspruchsfreie σ_{Ar}-Theorie mit $Q \subseteq T$. Dann ist die Relation

$$R_T := \{ n_\xi : \xi \in T \} \subseteq \mathbb{N}$$

(d.h. die Menge aller Gödelnummern von Sätzen in T)

nicht in T repräsentierbar.

Beweis: Durch Widerspruch.

Angenommen, $\psi(y)$ ist eine $FO[\sigma_{Ar}]$-Formel, die die Relation $R_T := \{ n_\xi : \xi \in T \}$ in T repräsentiert.

Sei $\varphi(y) := \neg \psi(y)$.

Gemäß Fixpunktsatz (Satz 9.35) gibt es einen $FO[\sigma_{Ar}]$-Satz χ s.d. $T \models (\chi \leftrightarrow \varphi(\underline{n_\chi}))$.

Dann gilt:

$$T \models \chi \iff T \models \varphi(n_\chi)$$

$$\underset{\varphi(y) = \neg\psi(y)}{\iff} T \models \neg\psi(n_\chi)$$

$$\underset{\substack{\psi(y) \text{ repr. } R_T \\ \text{in } T}}{\iff} n_\chi \notin R_T$$

$$\underset{R_T \overset{\text{Def}}{=} \{n_\xi : \xi \in T\}}{\iff} \chi \notin T$$

$$\underset{T \text{ ist eine Theorie}}{\iff} T \not\models \chi$$

↯ Widerspruch.

□ Satz 9.36

Als unmittelbare Folgerung aus Satz 9.36 (für $T := Th(\mathcal{N})$) erhalten wir den folgenden Satz von Tarski über die Nichtdefinierbarkeit der "Wahrheit".

(Einen $FO[\sigma_{Ar}]$-Satz ξ bezeichnen wir hier bei als "<u>wahr</u>", wenn er vom Standardmodell der Arithmetik ($\mathcal{N}$) erfüllt wird.)

Satz 9.37 (Der Satz von Tarski über die Nichtdefinierbarkeit der Wahrheit)

Die Menge aller "wahren" arithmetischen Sätze ist nicht arithmetisch definierbar.

Präzise:
Es gibt keine $FO[\sigma_{Ar}]$-Formel $\varphi(y)$, so dass für alle $FO[\sigma_{Ar}]$-Sätze ξ gilt:

$$\mathcal{N} \models \varphi(\underline{n_\xi}) \iff \mathcal{N} \models \xi.$$

Beweis: Folgt direkt aus Satz 9.36 mit $T := Th(\mathcal{N})$. $\square$

Als weitere Folgerung aus Satz 9.36 erhalten wir folgendes:

Satz 9.38 (Die Unentscheidbarkeit der Logik erster Stufe)
Jede widerspruchsfreie σ_{Ar}-Theorie T mit $Q \subseteq T$ ist unentscheidbar.

Insbesondere ist Q selbst unentscheidbar (aber rekursiv aufzählbar, da endlich axiomatisiert).

Beweis:

Sei T eine widerspruchsfreie σ_{Ar}-Theorie mit $Q \subseteq T$.

Angenommen, T ist entscheidbar, d.h. die Relation

$$R_T := \{ n_\xi : \xi \in T \} \subseteq \mathbb{N}$$

ist entscheidbar.

Gemäß Satz 9.33 ist R_T dann in Q repräsentierbar.

Wegen $Q \subseteq T$ ist R_T dann auch in T repräsentierbar.

$\lightning$ Widerspruch zu Satz 9.36.

$\square$ Satz 9.38

Gödels erster Unvollständigkeitssatz folgt nun unmittelbar aus Satz 9.38 und Korollar 9.5(b) (Entscheidbarkeit vollständiger, effektiv axiomatisierbarer Theorien):

Satz 9.39 (Gödels erster Unvollständigkeitssatz)

Jede widerspruchsfreie, effektiv axiomatisierbare σ_{Ar}-Theorie T mit $Q \subseteq T$ ist unvollständig.

Beweis:

Sei T eine widerspruchsfreie, effektiv axiomatisierbare σ_{Ar}-Theorie mit $Q \subseteq T$.

Angenommen, T ist vollständig.

Gemäß Korollar 9.5(b) ist T dann entscheidbar.

$\lightning$ Widerspruch zu Satz 9.38.

$\square$ Satz 9.39.