9.4 Die Minimale Arithmetik

<u>Definition 9.25</u>: (Die Theorie Q)

Die <u>minimale Arithmetik</u> ist die σ_{Ar}-Theorie Q, die von den folgenden $FO[\sigma_{Ar}]$-Sätzen axiomatisiert wird:

$\psi_{(Q1)} := \forall x \; \neg\, 0 = x+1$

$\psi_{(Q2)} := \forall x \forall y \; (x+1 = y+1 \to x=y)$

$\psi_{(Q3)} := \forall x \; x+0 = x$

$\psi_{(Q4)} := \forall x \forall y \; x+(y+1) = (x+y)+1$

$\psi_{(Q5)} := \forall x \; x \cdot 0 = 0$

$\psi_{(Q6)} := \forall x \forall y \; x \cdot (y+1) = (x \cdot y) + x$

$\psi_{(Q7)} := \forall x \; (x \leq 0 \leftrightarrow x=0)$

$\psi_{(Q8)} := \forall x \forall y \; (x \leq y+1 \leftrightarrow (x=y+1 \lor x \leq y))$

$\psi_{(Q9)} := \forall x \forall y \; (x \leq y \lor y \leq x)$

Lemma 9.26 ("Korrektheit" von Q)

Es gilt: $Q \subseteq Th(\mathcal{N})$,

und für alle $FO[\sigma_{Ar}]$-Formeln $\varphi(x_1, \dots, x_k)$ und alle $m_1, \dots, m_k \in \mathbb{N}$ gilt:

Falls $Q \models \varphi(\underline{m_1}, \dots, \underline{m_k})$, so $\mathcal{N} \models \varphi[m_1, \dots, m_k]$.

Beweis: Man sieht leicht, dass für jedes Axiom ψ von Q gilt: $\mathcal{N} \models \psi$.

Daher gilt auch für jede Formel $\psi' \in Q$, dass $\mathcal{N} \models \psi'$. Somit gilt: $Q \subseteq Th(\mathcal{N})$.

Insbes. gilt daher f.a. Formeln $\varphi(x_1, \dots, x_k) \in FO[\sigma_{Ar}]$ und f.a. $n_1, \dots, n_k \in \mathbb{N}$ folgendes:

Falls $Q \models \varphi(\underline{n_1}, \dots, \underline{n_k})$, so $\mathcal{N} \models \varphi(\underline{n_1}, \dots, \underline{n_k})$,

d.h. $\mathcal{N} \models \varphi[n_1, \dots, n_k]$.

$\square$

Bemerkung:

Q ist eine σ_{Ar}-Theorie, für die gilt

(1) Q ist widerspruchsfrei (da erfüllbar, durch $\mathcal{N}$),

(2) Q ist effektiv axiomatisierbar
(da Q ein endliches Axiomensystem besitzt)

und Q ist unvollständig (denn: $\mathcal{N} \models Q \Rightarrow$
falls Q vollständig wäre, so wäre $Q = Th(\mathcal{N})$.
Wegen (2) und Korollar 9.5 wäre $Th(\mathcal{N})$ dann
entscheidbar. $\lightning$ Widerspruch zu Satz 9.24).

Gödels erster Unvollständigkeitssatz besagt folgendes:

Jede σ_{Ar}-Theorie T, für die gilt:

(1) T ist widerspruchsfrei (d.h. erfüllbar),

(2) T ist effektiv axiomatisierbar
(d.h. sie besitzt ein entscheidbares Axiomensystem),

und

(3) $T \supseteq Q$ (d.h. T umfasst die "minimale Arithmetik")

ist unvollständig (d.h. es gibt einen $FO[\sigma_{Ar}]$-Satz φ, so dass weder φ noch $\neg\varphi$ aus T folgt).

Um Gödels ersten Unvollständigkeitssatz beweisen zu können, müssen wir zunächst ein etwas genaueres Verständnis der "minimalen Arithmetik" Q erlangen.

Unser erstes "Etappenziel" dabei ist, den folgenden Satz zu beweisen:

Satz 9.27 (Der Σ_1-Transfersatz)
Für jede Σ_1-Formel $\varphi(x_1, \dots, x_k)$ und f.a. $m_1, \dots, m_k \in \mathbb{N}$ gilt

$$\mathcal{N} \models \varphi[m_1, \dots, m_k] \iff Q \models \varphi(\underline{m_1}, \dots, \underline{m_k})$$

Die Richtung "$\Leftarrow$" des Σ_1-Transfersatzes folgt unmittelbar aus Lemma 9.26.

Um die Richtung "$\Rightarrow$" des Σ_1-Transfersatzes zu beweisen, verwenden wir die beiden folgenden Lemmas, die uns ein genaueres Verständnis darüber liefern, wie die Modelle von Q aussehen.

<u>Lemma 9.28</u>

Sei $\mathfrak{A}$ eine σ_{Ar}-Struktur mit $\mathfrak{A} \models Q$.
Dann gilt f.a. $m, n \in \mathbb{N}$ und alle $a \in A$:

(a) $\underline{m}^{\mathfrak{A}} = \underline{n}^{\mathfrak{A}} \iff m = n$

(b) $a \leq^{\mathfrak{A}} \underline{n}^{\mathfrak{A}} \iff a \in \{\underline{0}^{\mathfrak{A}}, \underline{1}^{\mathfrak{A}}, \dots, \underline{n}^{\mathfrak{A}}\}$

(c) $\underline{m}^{\mathfrak{A}} \leq^{\mathfrak{A}} \underline{n}^{\mathfrak{A}} \iff m \leq n$

(d) $\underline{m}^{\mathfrak{A}} +^{\mathfrak{A}} \underline{n}^{\mathfrak{A}} = \underline{m+n}^{\mathfrak{A}}$

(e) $\underline{m}^{\mathfrak{A}} \times^{\mathfrak{A}} \underline{n}^{\mathfrak{A}} = \underline{m \cdot n}^{\mathfrak{A}}$

(f) $0^{\mathfrak{A}} = \underline{0}^{\mathfrak{A}}$ und $1^{\mathfrak{A}} = \underline{1}^{\mathfrak{A}}$.

Beweis:

(a): "$\Leftarrow$": klar, denn $m=n \Rightarrow \underline{m} = \underline{n} \Rightarrow \underline{m}^{\mathfrak{N}} = \underline{n}^{\mathfrak{N}}$.

"$\Rightarrow$": Beweis per Induktion nach m. Zeigen wir, dass für jedes $m \in \mathbb{N}$ gilt: für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt ($\underline{m}^{\mathfrak{N}} = \underline{n}^{\mathfrak{N}} \Rightarrow m=n$).

$\underline{m=0}$: Es sei $n \in \mathbb{N}$ mit $\underline{0}^{\mathfrak{N}} = \underline{n}^{\mathfrak{N}}$. Zu zeigen: $0=n$.

Angenommen, $n \neq 0$. Dann ist $n>0$ und es gilt: $\underline{n} = \underline{n-1} + 1$.

Wegen $\mathfrak{N} \models \Psi_{(Q1)}$ gilt insbes.: $\mathfrak{N} \models \neg 0 = \underline{n-1}+1$.

Somit gilt: $0^{\mathfrak{N}} \neq \underline{n}^{\mathfrak{N}}$. $\lightning$ wid zu $\underline{0}^{\mathfrak{N}} = \underline{n}^{\mathfrak{N}}$ und $\underline{0} = 0$.

$\underline{m \to m+1}$: Es sei $n \in \mathbb{N}$ mit $\underline{m+1}^{\mathfrak{N}} = \underline{n}^{\mathfrak{N}}$. Zu zeigen: $m+1 = n$.

Wegen $\mathfrak{N} \models \Psi_{(Q1)}$ und $\underline{m+1} = \underline{m} + 1$ gilt:

$\mathfrak{N} \models \neg 0 = \underline{m+1}$. Somit gilt $0^{\mathfrak{N}} \neq \underline{m+1}^{\mathfrak{N}} = \underline{n}^{\mathfrak{N}}$

Daher: $n \neq 0$, d.h. $n>0$ (denn ang. $n=0$, so $\underline{n} = \underline{0}$ und $0^{\mathfrak{N}} = \underline{n}^{\mathfrak{N}}$ $\lightning$)

Somit: $\underline{n} = \underline{n-1} + 1$ (mit $n-1 \in \mathbb{N}$)

Wegen $\mathfrak{N} \models \Psi_{(Q2)}$ folgt, dass $\underline{m}^{\mathfrak{N}} = \underline{n-1}^{\mathfrak{N}}$.

Gemäß Induktionsannahme gilt $m = n-1$.

Daher $m+1 = n$.

$\Box_{(a)}$

(b) Aus $\mathfrak{N} \models \psi_{(Q7)}$ und $\mathfrak{N} \models \psi_{(Q8)}$ folgt induktiv, dass für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\mathfrak{N} \models \forall x \left(x \leq \underline{n} \leftrightarrow \bigvee_{i=0}^{n} x = \underline{i} \right)$$

Daraus folgt, dass f.a. $a \in A$ und alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$a \leq^{\mathfrak{N}} \underline{n}^{\mathfrak{N}} \iff a \in \{\underline{0}^{\mathfrak{N}}, \underline{1}^{\mathfrak{N}}, \dots, \underline{n}^{\mathfrak{N}}\}.$$

(c) Wegen (a) und (b) gilt:

$$\begin{aligned} \underline{m}^{\mathfrak{N}} \leq^{\mathfrak{N}} \underline{n}^{\mathfrak{N}} &\iff \underline{m}^{\mathfrak{N}} \in \{\underline{0}^{\mathfrak{N}}, \underline{1}^{\mathfrak{N}}, \dots, \underline{n}^{\mathfrak{N}}\} \\ &\iff m \in \{0, 1, \dots, n\} \\ &\iff m \leq n. \end{aligned}$$

(d) Folgt induktiv aus $\mathfrak{N} \models \psi_{(Q3)}$ und $\mathfrak{N} \models \psi_{(Q4)}$.

(e) Folgt induktiv aus $\mathfrak{N} \models \psi_{(Q5)}$ und $\mathfrak{N} \models \psi_{(Q6)}$.

(f) $0^{\mathfrak{N}} = \underline{0}^{\mathfrak{N}}$ gilt, da $0 = \underline{0}$.

$1^{\mathfrak{N}} = \underline{1}^{\mathfrak{N}}$ folgt aus $\mathfrak{N} \models \psi_{(Q3)}$, da $\underline{1} = 0+1$.

$\square$ Lea 9.28

Bemerkung 9.29:

Ist $\mathfrak{A}$ ein Modell von Q, so sei $\mathcal{N}_{\mathfrak{A}}$ die folgendermaßen definierte Substruktur von $\mathfrak{A}$:

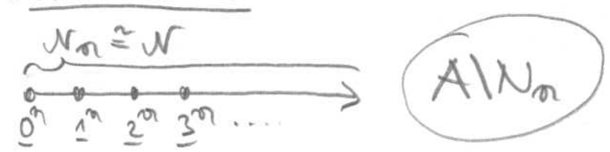
- Universum von $\mathcal{N}_{\mathfrak{A}}$: $N_{\mathfrak{A}} := \{ \underline{n}^{\mathfrak{A}} : n \in \mathbb{N} \}$
- F.a. $a, b \in N_{\mathfrak{A}}$ sei
  - $a \leq^{\mathcal{N}_{\mathfrak{A}}} b \quad :\Longleftrightarrow \quad a \leq^{\mathfrak{A}} b$
  - $a +^{\mathcal{N}_{\mathfrak{A}}} b \quad := \quad a +^{\mathfrak{A}} b$
  - $a \times^{\mathcal{N}_{\mathfrak{A}}} b \quad := \quad a \times^{\mathfrak{A}} b$

  Addition und Multiplikation sind wegen Lemma 9.28 d) e) wohldefiniert (für $a = \underline{m}^{\mathfrak{A}}$ und $b = \underline{n}^{\mathfrak{A}}$ gilt: $a +^{\mathfrak{A}} b = \underline{m+n}^{\mathfrak{A}} \in N_{\mathfrak{A}}$)
- Ferner sei $0^{\mathcal{N}_{\mathfrak{A}}} := \underline{0}^{\mathfrak{A}}$ und $1^{\mathcal{N}_{\mathfrak{A}}} := \underline{1}^{\mathfrak{A}}$
  (klar: $0^{\mathcal{N}_{\mathfrak{A}}}, 1^{\mathcal{N}_{\mathfrak{A}}} \in N_{\mathfrak{A}}$ wegen Lemma 9.28 f))

Beachte: Aus Lemma 9.28 folgt:

$\mathcal{N}_{\mathfrak{A}} \cong \mathcal{N}$, da $\pi : (n \mapsto \underline{n}^{\mathfrak{A}})_{n \in \mathbb{N}}$ ein Isomorphismus ist. Außerdem gilt wegen Lemma 9.28 b) und Axiom $\psi_{(Q9)}$ f.a. $a \in A \setminus N_{\mathfrak{A}}$, dass $\underline{n}^{\mathfrak{A}} \leq a$ (f.a. $n \in \mathbb{N}$). Somit ist $\mathcal{N}_{\mathfrak{A}}$ ein "Anfangsstück" von $\mathfrak{A}$ bzgl $\leq^{\mathfrak{A}}$.

Skizze von $\mathfrak{A}$:



zum Beweis des Σ_1-Transfersatzes benötigen wir noch folgendes Lemma:

Lemma 9.30

Für jedes Modell $\mathfrak{M}$ von Q gilt:

(a) Ist $t(x_1, \ldots, x_k)$ ein σ_{Ar}-Term und sind $n, m_1, \ldots, m_k \in \mathbb{N}$, so gilt:

$$t^{\mathfrak{M}}[\underline{m_1}^{\mathfrak{M}}, \ldots, \underline{m_k}^{\mathfrak{M}}] = \underline{n}^{\mathfrak{M}} \iff t^{\mathcal{N}}[m_1, \ldots, m_k] = n$$

(b) Ist $\varphi(x_1, \ldots, x_k) \in \Delta_0$ und sind $m_1, \ldots, m_k \in \mathbb{N}$, so gilt:

$$\mathfrak{M} \models \varphi[\underline{m_1}^{\mathfrak{M}}, \ldots, \underline{m_k}^{\mathfrak{M}}] \iff \mathcal{N} \models \varphi[m_1, \ldots, m_k]$$

(c) Ist $\varphi(x_1, \ldots, x_k) \in \Sigma_1$ und sind $m_1, \ldots, m_k \in \mathbb{N}$, so gilt:

Falls $\mathcal{N} \models \varphi[m_1, \ldots, m_k]$, so $\mathfrak{M} \models \varphi[\underline{m_1}^{\mathfrak{M}}, \ldots, \underline{m_k}^{\mathfrak{M}}]$

Beweis:

(a): Einfache Induktion über den Aufbau von t unter Verwendung von Lemma 9.28.

(b): Per Induktion über den Aufbau von $\varphi \in \Delta_0$:

- φ ist von der Form $t_1 = t_2$ oder $t_1 \leq t_2$:
  folgt direkt aus (a) und Lemma 9.28 c).

- φ ist von der Form $\neg\psi$, $(\psi_1 \vee \psi_2)$ oder $(\psi_1 \wedge \psi_2)$:
  folgt direkt aus der Induktionsannahme

- φ ist von der Form $\forall y \leq t\ \psi$:

  Sei $t = t(x_1, \dots, x_k)$ und $\psi = \psi(x_1, \dots, x_k, y)$.

  Seien $n, m_1, \dots, m_k \in \mathbb{N}$ so, dass gilt:

  $n = t^{\mathcal{N}}[m_1, \dots, m_k]$ (und wegen a) daher auch

  $\underline{n}^{\mathfrak{N}} = t^{\mathfrak{N}}[\underline{m_1}^{\mathfrak{N}}, \dots, \underline{m_k}^{\mathfrak{N}}]$). Dann gilt:

  $\mathcal{N} \models \varphi[m_1, \dots, m_k] \iff$ f.a. $\ell \leq n$ gilt: $\mathcal{N} \models \psi[m_1, \dots, m_k, \ell]$

  $\underset{\text{Ind.annahme}}{\iff}$ f.a. $\ell \leq n$ gilt: $\mathfrak{N} \models \psi[\underline{m_1}^{\mathfrak{N}}, \dots, \underline{m_k}^{\mathfrak{N}}, \underline{\ell}^{\mathfrak{N}}]$

  $\underset{\text{Lemma 9.28 b)}}{\iff}$ f.a. $a \leq \underline{n}^{\mathfrak{N}}$ gilt: $\mathfrak{N} \models \psi[\underline{m_1}^{\mathfrak{N}}, \dots, \underline{m_k}^{\mathfrak{N}}, a]$

  $\iff \mathfrak{N} \models \varphi[\underline{m_1}^{\mathfrak{N}}, \dots, \underline{m_k}^{\mathfrak{N}}]$.

- φ ist von der Form $\exists y \leq t\ \psi$:

  analog.

(c) Sei φ eine Σ_1-Formel der Form $\exists y\, \psi$,

wobei $\psi = \psi(x_1, \dots, x_k, y) \in \Delta_0$.

Seien $m_1, \dots, m_k \in \mathbb{N}$ s.d. $\mathcal{N} \models \varphi[m_1, \dots, m_k]$.

Dann ex. ein $n \in \mathbb{N}$ s.d. $\mathcal{N} \models \psi[m_1, \dots, m_k, n]$.

Wegen $\psi \in \Delta_0$ folgt aus (b), dass $\mathfrak{M} \models \psi[\underline{m_1}^{\mathfrak{M}}, \dots, \underline{m_k}^{\mathfrak{M}}, \underline{n}^{\mathfrak{M}}]$

Somit gilt (wg $\varphi = \exists y\, \psi$), dass $\mathfrak{M} \models \varphi[\underline{m_1}^{\mathfrak{M}}, \dots, \underline{m_k}^{\mathfrak{M}}]$.

$\square$

Wir können nun den Σ_1-Transfersatz beweisen:

Beweis von Satz 9.27:

Sei $\varphi(x_1, \dots, x_k)$ eine Σ_1-Formel und sei $m_1, \dots, m_k \in \mathbb{N}$.

Zu zeigen: $\mathcal{N} \models \varphi[m_1, \dots, m_k] \iff Q \vdash \varphi(\underline{m_1}, \dots, \underline{m_k})$.

Beweis: "$\Leftarrow$": folgt aus Lemma 9.26 (da $\mathcal{N} \models Q$).

"$\Rightarrow$": Es gelte $\mathcal{N} \models \varphi[m_1, \dots, m_k]$. Sei $\mathfrak{M}$ ein Modell von Q.

$\underset{\text{Lemma 9.30 c)}}{\Longrightarrow} \mathfrak{M} \models \varphi[\underline{m_1}^{\mathfrak{M}}, \dots, \underline{m_k}^{\mathfrak{M}}]$

$\underset{\text{Substitutionslemma}}{\Longrightarrow} \mathfrak{M} \models \varphi(\underline{m_1}, \dots, \underline{m_k})$.

$\square$

Als zweiten Schritt zum Beweis von Gödels erstem Unvollständigkeitssatz benötigen wir den folgenden Begriff der Repräsentierbarkeit von Relationen und Funktionen.

Definition 9.31 (Repräsentierbarkeit einer Relation)

Sei T eine Menge von $FO[\sigma_{Ar}]$-Sätzen, sei $k \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ und sei $R \subseteq \mathbb{N}^k$ eine k-stellige Relation.

(a) Eine $FO[\sigma_{Ar}]$-Formel $\varphi(x_1, \dots, x_k)$ repräsentiert R in T, falls f.a. $m_1, \dots, m_k \in \mathbb{N}$ gilt:

- Falls $(m_1, \dots, m_k) \in R$, so $T \models \varphi(\underline{m_1}, \dots, \underline{m_k})$
- Falls $(m_1, \dots, m_k) \notin R$, so $T \models \neg\varphi(\underline{m_1}, \dots, \underline{m_k})$.

(b) R heißt repräsentierbar in T, wenn es eine $FO[\sigma_{Ar}]$-Formel gibt, die R in T repräsentiert.

Definition 9.32 (Repräsentierbarkeit einer Funktion)

Sei T eine Menge von $FO[\sigma_{Ar}]$-Sätzen, sei $k \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ und sei $f: \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ eine (totale) Funktion

(a) Eine $FO[\sigma_{Ar}]$-Formel $\varphi(x_1,\dots,x_k,y)$ <u>repräsentiert f in T</u>, wenn gilt:

(1) f.a. $m_1,\dots,m_k,n \in \mathbb{N}$ gilt:

Falls $f(m_1,\dots,m_k) = n$, so $T \models \varphi(\underline{m_1},\dots,\underline{m_k},\underline{n})$

(2) f.a. $m_1,\dots,m_k \in \mathbb{N}$ gilt:

$$T \models \forall y_1 \forall y_2 \Big(\big(\varphi(\underline{m_1},\dots,\underline{m_k},y_1) \land \varphi(\underline{m_1},\dots,\underline{m_k},y_2) \big) \rightarrow y_1 = y_2 \Big)$$

<u>Beachte</u>: Aus (1) und (2) folgt, dass f.a. $m_1,\dots,m_k,n \in \mathbb{N}$ gilt: Falls $f(m_1,\dots,m_k) \neq n$, so $T \models \neg\varphi(\underline{m_1},\dots,\underline{m_k},\underline{n})$

Insbesondere ist also der Graph von f repräsentierbar in T (durch die Formel φ) (Details: Übung).

Das nächste "Etappenziel" zum Beweis von Gödels erstem Unvollständigkeitssatz ist, den folgenden Satz zu beweisen:

Satz 9.33 (Repräsentierbarkeit (in Q) der berechenbaren Funktionen und entscheidbaren Relationen)

Sei $k \in \mathbb{N}_{\geq 1}$.

(a) Jede TM-berechenbare (totale) Funktion $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ ist in Q repräsentierbar.

(b) Jede TM-entscheidbare Relation $R \subseteq \mathbb{N}^k$ ist in Q repräsentierbar.

Beweis von (b) unter Verwendung von (a):

Sei $R \subseteq \mathbb{N}^k$ entscheidbar. Sei $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ definiert durch

$$f(m_1, \dots, m_k) := \begin{cases} 1 & \text{falls } (m_1, \dots, m_k) \in R \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dann ist f eine totale, TM-berechenbare Funktion.

Gemäß Teil (a) von Satz 9.33 gibt es eine $FO[\sigma_{Ar}]$-Formel $\varphi_f(x_1, \dots, x_k, y)$, die f in Q repräsentiert.

Setze $\varphi_R(x_1, \dots, x_k) := \varphi_f(x_1, \dots, x_k, \underline{1})$

Behauptung: φ_R repräsentiert R in Q.

Beweis: Sei $m_1, \dots, m_k \in \mathbb{N}$. Dann gilt:

- $(m_1, \dots, m_k) \in R \underset{\text{Wahl von } f}{\Rightarrow} f(m_1, \dots, m_k) = 1$

$$\underset{\varphi_f \text{ repr. } f \text{ in } Q}{\Rightarrow} Q \models \varphi_f(\underline{m_1}, \dots, \underline{m_k}, \underline{1})$$

$$\underset{\text{Wahl von } \varphi_R}{\Rightarrow} Q \models \varphi_R(\underline{m_1}, \dots, \underline{m_k})$$

- $(m_1, \dots, m_k) \notin R \underset{\text{Wahl von } f}{\Rightarrow} f(m_1, \dots, m_k) \neq 1$

$$\underset{\varphi_f \text{ repr. } f \text{ in } Q}{\Rightarrow} Q \models \neg\varphi_f(\underline{m_1}, \dots, \underline{m_k}, \underline{1})$$

$$\underset{\text{Wahl von } \varphi_R}{\Rightarrow} Q \models \neg\varphi_R(\underline{m_1}, \dots, \underline{m_k}).$$

Somit gilt: φ_R repräsentiert R in Q.

Dies beendet den Beweis von Satz 9.33 (b) unter Verwendung von Satz 9.33 (a).

Um Satz 9.33 (a) zu beweisen, benutzen wir folgendes Lemma:

Lemma 9.34

(b) Sei $f: \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ eine TM-berechenbare totale Funktion.
Dann gibt es Δ_0-definierbare Funktionen $g: \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ und $h: \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{N}$, so dass für alle $m_1, \dots, m_k \in \mathbb{N}$ gilt:

$$f(m_1,\dots,m_k) = h\big(m_1,\dots,m_k, g(m_1,\dots,m_k)\big)$$

(a) Jede Δ_0-definierbare totale Funktion ist in Q repräsentierbar.

(c) Seien $g: \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ und $h: \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{N}$ in Q repräsentierbar, und sei $f: \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ so definiert, dass f.a. $m_1, \dots, m_k \in \mathbb{N}$ gilt:

$$f(m_1,\dots,m_k) = h\big(m_1,\dots,m_k, g(m_1,\dots,m_k)\big).$$

Dann ist f in Q repräsentierbar.

Beachte: Satz 9.33 (a) folgt unmittelbar aus Lemma 9.34 a)–c).
Um den Beweis von Satz 9.33 abzuschließen, genügt es also, Lemma 9.34 zu beweisen.