9.2 Arithmetisierung von $FO[\sigma_{Ar}]$

<u>Notation 9.6</u> (Arithmetik)

- Für den Rest dieses Kapitels betrachten wir stets die Signatur

$$\sigma_{Ar} = \{ \leq, +, \times, 0, 1 \}$$

- ~~Statt~~ ~~$T_{\sigma_{Ar}}$~~ ~~und~~ ~~$FO[\sigma_{Ar}]$~~ ~~schreiben wir kurz~~ ~~T_{Ar}~~ ~~und~~ ~~FO_{Ar}~~.
  ~~Wir schreiben~~ ~~S_{Ar}~~ ~~um die Menge aller~~ ~~$FO[\sigma_{Ar}]$-Sätze zu bezeichnen.~~

- $\mathcal{N}$ bezeichnet wie üblich das Standardmodell $(\mathbb{N}, \leq^{\mathcal{N}}, +^{\mathcal{N}}, \times^{\mathcal{N}}, 0^{\mathcal{N}}, 1^{\mathcal{N}})$ der Arithmetik

- Für Terme $t, u \in T_{\sigma_{Ar}}$ schreiben wir

$$t < u$$

  als Abkürzung für die $FO[\sigma_{Ar}]$-Formel

$$(t \leq u \wedge \neg t = u)$$

Definition 9.7 (Die Zahlterme $\underline{n}$)

Die Zahlterme $\underline{n}$, für $n \in \mathbb{N}$, seien die folgendermaßen definierten σ_{Ar}-Terme:

$\underline{0} := 0$, und f.a. $n \in \mathbb{N}$ sei

$\underline{n+1} := (\underline{n} + 1)$; präzise $\underline{n+1} := +\underline{n}\,1$ (vgl Def 1.14)

Bsp: $\underline{0} = 0$, $\underline{1} \mathrel{\hat{=}} (\underline{0}+1) \mathrel{\hat{=}} +01$, $\underline{2} \mathrel{\hat{=}} (\underline{1}+1) \mathrel{\hat{=}} +\underline{1}1 = ++011$,
$\underline{3} \mathrel{\hat{=}} (\underline{2}+1) \mathrel{\hat{=}} +\underline{2}1 = +++0111$

Arithmetisierung:

- Wir kodieren syntaktische Objekte wie Symbole aus σ_{Ar}, Formeln aus $FO[\sigma_{Ar}]$ usw. durch natürliche Zahlen in Hexadezimaldarstellung, die wir als Wörter über dem Alphabet

  $$A_{HEX} := \{0, \dots, 9, a, \dots, f\}$$

  auffassen.

  Für eine Zahl $n \in \mathbb{N}$ schreiben wir $[n]_{HEX}$, um ihre Hexadezimaldarstellung zu bezeichnen.
  Für ein $w \in A_{HEX}^{+}$ schreiben wir $[w]_{\mathbb{N}}$, um die natürliche Zahl zu bezeichnen, die durch w in Hexadezimaldarstellung repräsentiert wird.

- Unser Ziel ist eine Kodierung, die alle Eigenschaften aus Annahme 9.1 besitzt.

- Weil für $w \in A_{Hex}^*$ die Wörter w und $0w$ dieselbe Zahl darstellen, vermeiden wir Kodewörter, die mit 0 beginnen.

- Den Kode eines Objekts σ werden wir stets mit $\langle \sigma \rangle$ bezeichnen.

<u>Zur Erinnerung</u>

σ_{Ar}-Terme und $FO[\sigma_{Ar}]$-Formeln sind Wörter über dem Alphabet

$$A_{\sigma_{Ar}} = Var \cup \{ \neg, \wedge, \vee, \exists, \forall, (,), = \}$$
$$\cup \{ \leq, +, \times, 0, 1 \}$$

<u>Definition 9.8</u> (Kodierung von $A_{\sigma_{Ar}}$)

Wir kodieren die Elemente des Alphabets $A_{\sigma_{Ar}}$ durch Worte über de Alphabet A_{Hex} wie folgt:

- <u>Variablen:</u> für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist

$$\langle v_n \rangle := 1\underbrace{0 \cdots 0}_{n\text{-mal}} = [16^n]_{Hex}$$

- Logische Symbole:
  - $\langle \neg \rangle := 2 = [2]_{Hex}$
  - $\langle \wedge \rangle := 3 = [3]_{Hex}$
  - $\langle \vee \rangle := 4 = [4]_{Hex}$
  - $\langle \exists \rangle := 5 = [5]_{Hex}$
  - $\langle \forall \rangle := 6 = [6]_{Hex}$
  - $\langle (\rangle := 7 = [7]_{Hex}$
  - $\langle) \rangle := 8 = [8]_{Hex}$
  - $\langle = \rangle := 9 = [9]_{Hex}$

- Arithmetische Symbole:
  - $\langle \leq \rangle := a = [10]_{Hex}$
  - $\langle + \rangle := b = [11]_{Hex}$
  - $\langle \times \rangle := c = [12]_{Hex}$
  - $\langle 0 \rangle := d = [13]_{Hex}$
  - $\langle 1 \rangle := e = [14]_{Hex}$

Definition 9.9 (Kodierung von Termen, Formeln und Beweisen)

(a) Für jedes Wort $w = w_1 \cdots w_\ell \in A^*_{\sigma_{Ar}}$ ist $\langle w \rangle := \langle w_1 \rangle \langle w_2 \rangle \cdots \langle w_\ell \rangle$.

Insbesondere gilt:

- Für jeden Term $t \in T_{\sigma_{Ar}}$, etwa $t = s_1 \cdots s_\ell \in A^*_{\sigma_{Ar}}$ ist

$$\langle t \rangle = \langle s_1 \rangle \langle s_2 \rangle \cdots \langle s_\ell \rangle$$

- Für jede Formel $\varphi \in FO[\sigma_{Ar}]$, etwa $\varphi = s_1 \cdots s_\ell \in A^*_{\sigma_{Ar}}$ ist

$$\langle \varphi \rangle = \langle s_1 \rangle \langle s_2 \rangle \cdots \langle s_\ell \rangle$$

(b) Für eine endliche nicht-leere Formelmenge $\Phi \subseteq FO[\sigma_{Ar}]$ sei

$$\langle \Phi \rangle := \langle \varphi_1 \rangle f \langle \varphi_2 \rangle f \cdots f \langle \varphi_\ell \rangle,$$

falls $\Phi = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_\ell\}$ mit

$[\langle \varphi_1 \rangle]_{\mathbb{N}} \leq [\langle \varphi_2 \rangle]_{\mathbb{N}} \leq \cdots \leq [\langle \varphi_\ell \rangle]_{\mathbb{N}}$, wobei $<$ hier die natürliche lineare Ordnung auf $\mathbb{N}$ bezeichnet.

Beachte: $f \in A_{Hex}$ wird hier als "Trennsymbol" verwendet.

Ferner sei $\langle \emptyset \rangle := 0 = [0]_{Hex}$

(d) Für eine Sequenz $\Gamma \vdash \varphi$ sei

$$\langle \Gamma \vdash \varphi \rangle := \mathtt{ff} \langle \Gamma \rangle \mathtt{ff} \langle \varphi \rangle \mathtt{ff}.$$

(e) Für eine Folge $(S_1, \dots, S_\ell)$ von Sequenzen (also insbes auch für eine Ableitung im Sequenzenkalkül) sei

$$\langle (S_1, \dots, S_\ell) \rangle := \langle S_1 \rangle \cdots \langle S_\ell \rangle.$$

Lemma 9.10

Die in Definition 9.8 und 9.9 eingeführte Kodierung besitzt alle Eigenschaften aus Annahme 9.1.

Ferner gilt für alle syntaktischen Objekte o (d.h. für Terme, Formeln, Formelmengen, Sequenzen, Beweise), dass entweder $\langle o \rangle = 0$ ist oder $\langle o \rangle$ mit einem Zeichen in $\{1, \dots, 9, a, \dots, f\}$ beginnt.

Daher lässt sich jedes Kodewort $\langle o \rangle$ als Hexadezimaldarstellung der natürlichen Zahl $[\langle o \rangle]_{\mathbb{N}}$ auffassen.

Beweis: Übung.

Bemerkung 3.11 (Gödelisierung)
Die Kodierung von Formeln durch natürliche Zahlen bezeichnet man auch als **Gödelisierung**.
Für eine Formel $\varphi \in FO[\sigma_{Ar}]$ bezeichnet man die Zahl $n_\varphi := [\langle\varphi\rangle]_{\mathbb{N}} \in \mathbb{N}$ als die **Gödelnummer** von φ.

Lemma 9.12

Die Funktion $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $f(n) := [\langle \underline{n} \rangle]_{\mathbb{N}}$

(f.a. $n \in \mathbb{N}$) ist berechenbar.

D.h.: Es gibt einen Algorithmus, der bei Eingabe einer Zahl $n \in \mathbb{N}$ die Gödelnummer des Terms $\underline{n}$ ausgibt.

Beweis: Gemäß Definition 9.7 gilt:

$\underline{0} = 0 \in \sigma_{Ar}$ und f.a. $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$\underline{n+1} = (\underline{n} + 1)$ bzw präzise: $\underline{n+1} = + \underline{n}\, 1$ (vgl. Def 9.7)

Man sieht leicht, dass f.a. $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 1$ gilt:

$$\underline{n} = \underbrace{++\cdots+}_{n\text{-mal}} 0 \underbrace{11\cdots1}_{n\text{-mal}}.$$

Gemäß Definition 9.8 gilt: $\langle 0 \rangle = d$, $\langle 1 \rangle = e$ und $\langle + \rangle = b$.

Somit gilt gemäß Def. 9.9:

$[\langle \underline{0} \rangle]_{\mathbb{N}} = [\langle 0 \rangle]_{\mathbb{N}} = [d]_{\mathbb{N}} = 13$ („d" ist die Hexadezimaldarstellung der Zahl 13)

Und f.a. $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 1$ gilt:

$$[\langle \underline{n} \rangle]_{\mathbb{N}} = [\langle \underbrace{++\cdots+}_{n} 0 \underbrace{11\cdots1}_{n} \rangle]_{\mathbb{N}} = [\underbrace{bb\cdots b}_{n}\, d\, \underbrace{ee\cdots e}_{n}]_{\mathbb{N}}$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} [e]_{\mathbb{N}} \cdot 16^i + [d]_{\mathbb{N}} \cdot 16^n + \sum_{i=n+1}^{2n} [b]_{\mathbb{N}} \cdot 16^i$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} 14 \cdot 16^i + 13 \cdot 16^n + \sum_{i=n+1}^{2n} 11 \cdot 16^i.$$

Man kann leicht einen Algorithmus angeben, der bei Eingabe einer Zahl $n \in \mathbb{N}$ zunächst den Term $\underline{n}$, dann das Kodewort $\langle \underline{n} \rangle$ und daraus die Zahl $[\langle \underline{n} \rangle]_{\mathbb{N}}$ berechnet.

$\square$

Übungsaufgabe: Berechnen Sie die Gödelnummern der Terme $\underline{0}$, $\underline{1}$ und $\underline{2}$.

Lemma 9.13 (Definierbare Zahlenmengen)

Sei Φ eine entscheidbare Menge von $FO[\sigma_{Ar}]$-Sätzen, und sei $\varphi(x)$ eine $FO[\sigma_{Ar}]$-Formel. Dann gilt:

(a) Die Menge $\{ n \in \mathbb{N} : \Phi \models \varphi(\underline{n}) \}$ ist rekursiv aufzählbar.

(b) Die Menge $\{ n \in \mathbb{N} : \Phi \models \neg\varphi(\underline{n}) \}$ ist rekursiv aufzählbar.

(c) Wenn für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $\Phi \models \varphi(\underline{n})$ oder $\Phi \models \neg\varphi(\underline{n})$, so ist die Menge $\{ n \in \mathbb{N} : \Phi \models \varphi(\underline{n}) \}$ entscheidbar.

Beweis:

(a) Wegen Lemma 9.10 erfüllt unsere Kodierung die Annahme 9.1.

Wegen Lemma 9.12 und Annahme 9.1 (c) ist daher die Funktion

$$n \mapsto \langle \varphi(\underline{n}) \rangle \quad (\text{f.a. } n \in \mathbb{N}) \qquad (*)$$

berechenbar,
d.h. es gibt einen Algorithmus, der bei Eingabe einer Zahl n die Kodierung der Formel $\varphi\frac{\underline{n}}{x}$ $(= \varphi(\underline{n}))$ ausgibt.

Daher ist die Menge $\{ \langle \varphi(\underline{n}) \rangle : n \in \mathbb{N} \}$ rekursiv aufzählbar.

Laut Voraussetzung ist Φ entscheidbar. D.h. die Theorie $\{ \psi : \psi$ ist ein $FO[\sigma_{Ar}]$-Satz mit $\Phi \models \psi \}$ ist effektiv axiomatisierbar. Gemäß Korollar 9.5 (a) ist $\{ \langle \psi \rangle : \psi$ ist ein $FO[\sigma_{Ar}]$-Satz mit $\Phi \models \psi \}$ rekursiv aufzählbar.

Somit sind die beiden Mengen
$\{ \langle \varphi(\underline{n}) \rangle : n \in \mathbb{N} \}$ und $\{ \langle \psi \rangle : \psi$ ist $FO[\sigma_{Ar}]$-Satz, $\Phi \models \psi \}$
rekursiv aufzählbar.

Da der Durchschnitt zweier rekursiv aufzählbarer Mengen rekursiv aufzählbar ist, ist auch die Menge

$$\{ \langle \varphi(\underline{n}) \rangle : n \in \mathbb{N}, \ \Phi \vDash \varphi(\underline{n}) \}$$

rekursiv aufzählbar.

Wegen (*) ist daher auch die Menge

$$\{ n \in \mathbb{N} : \Phi \vDash \varphi(\underline{n}) \}$$

rekursiv aufzählbar.

(b) folgt aus (a) mit $\neg\varphi$ an Stelle von φ

(c) folgt direkt aus (a), (b) und der Voraussetzung i (c) (ähnlich wie im Beweis von Korollar 9.5 (b)).

□