Kapitel 9: Die Gödelschen Unvollständigkeitssätze

9.1 Theorien und Entscheidbarkeit

Zur Erinnerung:

Sei M eine abzählbare Menge

(a) Eine Menge $L \subseteq M$ heißt entscheidbar, falls es einen Algorithmus gibt, der bei Eingabe eines $m \in M$ nach endlich vielen Schritten anhält und ausgibt

- "$m \in L$", falls $m \in L$
- "$m \notin L$", falls $m \notin L$

(b) Eine Menge $L \subseteq M$ heißt rekursiv aufzählbar (engl.: recursively enumerable, kurz: r.e.), falls es einen Algorithmus gibt, der nach und nach sämtliche Elemente in L ausgibt.

(c) Sei M' eine Menge. Eine Funktion $f: M \to M'$ heißt berechenbar, falls es einen Algorithmus gibt, der bei Eingabe eines $m \in M$ nach endlich vielen Schritten anhält und den Wert $f(m)$ ausgibt.

Beachte:

Ist $M = A^*$, wobei A ein endliches Alphabet ist, so gilt für alle $L \subseteq M$:

Falls L entscheidbar ist, so ist L auch rekursiv aufzählbar.

Vereinbarungen zur Kodierung der Syntax von FO[σ]-Formeln:

- In diesem Kapitel sei σ eine abzählbare entscheidbare Signatur.
  Die Symbole aus σ sind kodiert als Wörter über einem endlichen Alphabet, etwa dem ASCII-Alphabet
- Wir kodieren σ-Terme und FO[σ]-Formeln als Wörter über einem endlichen Alphabet
- Wir erweitern die Kodierung auf endliche Mengen von σ-Termen und FO[σ]-Formeln
- Wir kodieren Ableitungen im Sequenzenkalkül $\mathfrak{S}$ (vgl. Kapitel 7) als Wörter über einem endlichen Alphabet

Sei $\mathbb{A}$ das endliche Alphabet, das wir zur Kodierung von Symbolen (aus σ), Termen, Formeln, endlichen Mengen von Termen und Formeln sowie Beweisen (in $\mathfrak{S}$) verwenden.

Seien $Y, V, T, L, S, G, B \subseteq \mathbb{A}^*$

die Mengen der kodierten

- Symbole aus σ (Y)
- Variablen (V)
- Terme (T)
- $FO[\sigma]$-Formeln (L)
- $FO[\sigma]$-Sätze (S)
- endlichen Formelmengen (G)
- Beweise (dh Ableitungen in $\mathfrak{S}$) (B).

Wir gehen im Folgenden davon aus, dass unsere Kodierung die folgenden Eigenschaften hat

<u>Annahme 9.1</u>:

Unsere Kodierung hat die folgenden Eigenschaften:

<u>(a)</u> Die Mengen $Y, V, T, L, S, G, B \subseteq \mathbb{A}^*$ sind entscheidbar.

(b) Die logischen Operationen

- Negation
- Disjunktion
- Konjunktion
- existentielle Quantifizierung
- universelle Quantifizierung,

aufgefasst als 1- bzw 2-stellige partielle Funktionen auf A^*, sind berechenbar.

(c) Die beiden Funktionen, die jeder $FO[\sigma]$-Formel die (endliche) Menge ihrer Variablen bzw die (endliche) Menge ihrer Subformeln zuordnen, sind berechenbar.

(d) Die Substitution einer Variablen durch einen Term in einer Formel, aufgefasst als 3-stellige partielle Funktion auf A^*, ist berechenbar.

(e) Die 2-stellige Relation

$$\{ (f, g) \in A^* \times A^* :$$

$f \in L$ ist die Kodierung einer Formel $\varphi \in FO[\sigma]$ und
$g \in G$ ist die Kodierung einer endlichen
Menge Γ von $FO[\sigma]$-Formel mit $\varphi \in \Gamma$ $\}$

ist entscheidbar.

(f) Die 3-stellige Relation

$$\{ (b, g, f) \in (A^*)^3 :$$

$g \in G$ ist die Kodierung einer endlichen Menge
Γ von $FO[\sigma]$-Formeln,
$f \in L$ ist die Kodierung einer $FO[\sigma]$-Formel φ,
$b \in B$ ist die Kodierung einer Ableitung
$\Gamma \vdash \varphi$ im Sequenzenkalkül $\}$

ist entscheidbar.

Übungsaufgabe: Geben Sie eine Kodierung an, die die in Annahme 9.1 aufgelisteten Eigenschaften hat.

Vereinbarung:

Für den Rest dieses Kapitels unterscheiden wir nicht mehr zwischen syntaktischen Objekten (wie $FO(\sigma)$-Formeln) und ihren Kodierungen. Zum Beispiel sprechen wir direkt von entscheidbaren Formelmengen (und meinen dabei eigentlich entscheidbare Mengen von Kodierungen von Formeln).

Lemma 9.2 (Aufzählbarkeit der beweisbaren Sätze)

Sei $\Phi \subseteq FO[\sigma]$ eine rekursiv aufzählbare Formelmenge.

Dann ist auch die Menge

$$\{ \varphi \in FO[\sigma] \; : \; \Phi \models \varphi \}$$

rekursiv aufzählbar.

Beweis: Gemäß Vollständigkeitssatz gilt:

$$\{ \varphi \in FO[\sigma] : \Phi \models \varphi \} = \{ \varphi \in FO[\sigma] : \Phi \vdash_{\mathfrak{S}} \varphi \}.$$

Daher zählt der folgende Algorithmus nach und nach sämtliche Elemente aus $\{ \varphi \in FO[\sigma] : \Phi \models \varphi \}$ auf:

1) Für $n = 1, 2, 3, \dots$ tue folgendes:

2) Zähle die ersten n Formeln $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ aus Φ auf (... mit dem Algor., den es laut Voraussetzung gibt)

3) Zähle die ersten n Kodierungen von Beweisen in $\mathfrak{S}$, etwa $b_1, \dots, b_n$ auf (... mit dem Algor., den es laut Annahme 9.1 (a) gibt)

4) Prüfe für jedes b_i, ob es eine Sequenz $\Gamma \vdash \varphi$ mit $\Gamma \subseteq \{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$ beweist.
Wenn ja, gib φ aus.

□

Als unmittelbare Folgerung aus Lemma 9.2 erhalten wir:

Korollar 9.3
Die Menge aller allgemeingültigen $FO[\sigma]$-Formeln ist rekursiv aufzählbar.

Bemerkung: Dies ist die Formalisierung der auf Seite 201 angekündigten Aussage.

Definition 9.4 (Theorie)

(a) Eine **σ-Theorie** (kurz: **Theorie**) ist eine Menge T von $FO[\sigma]$-Sätzen, die unter der Folgerungsbeziehung abgeschlossen ist, d.h. für alle $FO[\sigma]$-Sätze φ gilt

Falls $T \models \varphi$, so $\varphi \in T$.

(b) Eine Theorie T ist **vollständig**, wenn für alle $FO[\sigma]$-Sätze φ gilt:

$\varphi \in T$ oder $\neg\varphi \in T$

(c) Eine Menge Φ von $FO[\sigma]$-Sätzen ist ein **Axiomensystem** für eine Theorie T (kurz: Φ axiomatisiert T), wenn gilt:

$$T = \{ \varphi : \varphi \text{ ist ein } FO[\sigma]\text{-Satz mit } \Phi \models \varphi \}$$

(d) Eine Theorie T heißt **endlich axiomatisierbar**, wenn sie ein **endliches** Axiomensystem besitzt.

(e) Eine Theorie T heißt **effektiv axiomatisierbar**, wenn sie ein **entscheidbares** Axiomensystem besitzt.

Beispiel:

- Für jede σ-Struktur $\mathfrak{A}$ ist $Th(\mathfrak{A})$ eine vollständige σ-Theorie.
- Die Gruppentheorie T_{Gr} ist die Menge aller $FO[\sigma_{Gr}]$-Sätze, die aus den Gruppenaxiomen folgen (wobei $\sigma_{Gr} := \{\circ\}$ aus einem 2-stelligen Funktionssymbol $\circ$ besteht). (Details: siehe Buch von Ebbinghaus, Flum, Thomas).

Als Folgerung aus Lemma 9.2 erhalten wir:

Korollar 9.5 (entscheidbare Theorien)

(a) Jede effektiv axiomatisierbare Theorie ist rekursiv aufzählbar.

(b) Jede vollständige, effektiv axiomatisierbare Theorie T ist entscheidbar.

Beweis:

(a) folgt direkt aus Lemma 9.2.

(b) Fall 1: T ist widerspruchsfrei. Da T vollständig ist gilt dann für jeden $FO[\sigma]$-Satz φ: entweder $\varphi \in T$ oder $\neg\varphi \in T$.

Bei Eingabe eines $FO(\sigma)$-Satzes φ kann

unser Algorithmus zum Entscheiden, ob
$\varphi \in T$ oder $\varphi \notin T$ daher wie folgt vorgehen:
Nutze den Algorithmus aus Teil (a), um
T aufzuzählen, bis entweder φ oder $\neg\varphi$
ausgegeben wird und gib entsprechend
"$\varphi \in T$" bzw "$\varphi \notin T$" aus.

<u>Fall 2</u>: T ist widersprüchsvoll, d.h. es gibt
eine $FO[\sigma]$-Formel ψ mit $T \models \psi$ und $T \models \neg\psi$.
Dann ist T nicht erfüllbar. Somit gilt f.a. $\varphi \in FO[\sigma]$: $T \models \varphi$.
Da T unter der Folgerungsbeziehung abgeschlossen
ist, ist T daher die Menge <u>aller</u> $FO[\sigma]$-Sätze.
Diese ist gemäß Annahme 9.2 (a) entscheidbar.

$\square$